Lezione 22 - 6/11/2025

Topologia di $\mathbb{R}$ e successioni a valori in $\mathbb{R}$

1) 2° teor. di Bolzano - Weierstrass

<u>Teor</u> Da una successione a valori in $\mathbb{R}$ che sia limitata si può sempre estrarre una sottosuccessione convergente (a un valore di $\mathbb{R}$)

2) successioni e insiemi chiusi

(sapendo che E è chiuso se e solo se $E = \overline{E}$, cioè E è chiuso se e solo se E coincide con la sua chiusura)

Voglio dare un teorema di <u>caratterizzazione</u> dei chiusi

<u>Teor</u> sia $E \subseteq \mathbb{R}$
sono equivalenti le seguenti proprietà:

1) E è chiuso

2) ogni successione a valori in E che sia convergente, essa è convergente a un punto di E.

<u>dim.</u> supponiamo E chiuso.

prendiamo una successione in E (quindi $\forall n, \ x_n \in E$)

che sia convergente (quindi $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_n x_n = \bar{x}$)

facciamo vedere che $\bar{x} \in E$

È sufficiente osservare che se $\bar{x} = \lim_n x_n$

$\forall U$ di $\bar{x}$, $\exists \bar{n} : \forall n, \quad n > \bar{n} \Rightarrow x_n \in U$

ma allora $\forall U$ intorno di $\bar{x}$, $\underset{x_n}{U} \cap \underset{x_n}{E} \neq \emptyset$ per $n > \bar{n}$

quindi $\bar{x}$ è di chiusura per E
quindi $\bar{x} \in \overline{E}$ ma $\overline{E} = E$ perché E è chiuso

vale 2)

<u>viceversa</u> supponiamo che valga 2)
devo provare che E è chiuso.

prendo $\bar{x} \in \overline{E}$. se riesco a far vedere che $\bar{x} \in E$ ho finito.

osservo che se $\bar{x} \in \overline{E}$ esiste una successione in E che converge a $\bar{x}$

la posso costruire

fisso $\varepsilon = 1$, considero $]\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon[$ ← è un intorno di $\bar{x}$
ma $\bar{x} \in \overline{E}$ allora in $]\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon[$ posso prendere $x_1 \in E$

fisso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ ottengo $x_2 \in]\bar{x} - \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}[$ e $x_2 \in E$

fisso $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $\longrightarrow$ ottengo $x_k \in]\bar{x} - \frac{1}{k}, \bar{x} + \frac{1}{k}[$ e $x_k \in E$

considero $(x_k)_k$ è in E e $\lim_k x_k = \bar{x}$
allora 2) garantisce che $\bar{x} \in E$.
CVD

3) Insiemi compatti.

def. sia $K \subseteq \mathbb{R}$.

K si dice compatto (o compatto per successioni) se vale la seguente proprietà:

ogni successione a valori in K ammette una sottosuccessione convergente a un punto di K

o similmente

da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente a un pt. di K.

Teorema sia $K \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti

1) K è compatto

2) K è chiuso e limitato.

dim. supponiamo che K sia compatto.

facciamo vedere che K è chiuso

Per far vedere che K è chiuso uso il punto 2)

faccio vedere che una successione in K che sia convergente, converge a un pto di K.

prendo $(x_n)_n$ t.c. $\forall n,\ x_n \in K$

e tale che $\lim_n x_n = \bar{x} \in \mathbb{R}$

se riesco a far vedere che $\bar{x} \in K$ ho finito

$(x_n)_n$ in K, K compatto $\Rightarrow$ $\exists (x_{n_k})_k$ sottosuccessione

ed esiste $\bar{y} \in K$

t.c. $\lim_k x_{n_k} = \bar{y}$

ma io so che $(x_n)_n$ converge a $\bar{x}$

allora ogni sottosuccessione converge $\bar{x}$

ma allora $\lim_k \underbrace{x_{n_k}}_{\bar{y}} = \bar{x}$ $\Rightarrow$ $\bar{y} = \bar{x}$

ma $\bar{y} \in K$

Allora $\bar{x} \in K$.

provo che se K è compatto allora K è limitato.

per assurdo sia K non limitato, per esempio non superiormente limitato.

cioè $\forall n, \exists x_n \in K: \ x_n > n$

ma allora $\lim_n x_n = +\infty$

ma allora tutte le sottosuccessioni fanno $\lim_k x_{n_k} = +\infty$

non ce ne sono di convergenti

K non è compatto assurdo

viceversa. se K è chiuso e limitato

devo provare che

da ogni succ. posso estrarre una sottosucc. convergente a un pto di K.

viceversa. se K è chiuso e limitato
devo provare che
da ogni succ. posso estrarre
una sottosucc. convergente
a un pto di K.

prendo $(x_n)_n$ in K che è limitato
allora $(x_n)_n$ è limitata
allora 2° B.W. mi dice che c'è una
sottosucc. convergente.
la sottosuccessione convergente è in K che è chiuso
ma allora il suo limite sta in K
quindi K è compatto

CVD

4) Successioni di CAUCHY

def. sia $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$
si dice successione di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \; , \; n, m > \bar{n} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

oss. se $(x_n)_n$ è convergente con $\lim_n x_n = \bar{x} \in \mathbb{R}$
allora $(x_n)_n$ è successione di Cauchy

infatti
$\lim_n x_n = \bar{x}$ significa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, \quad n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon/2$$

quindi n, m con $n, m > \bar{n}$

$$|x_n - x_m| \le |x_n - \bar{x} + \bar{x} - x_m| \le \underbrace{|x_n - \bar{x}|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|\bar{x} - x_m|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon .$$

¿ vale anche il viceversa ?

Teorema (di COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$)

sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$,
sia $(x_n)_n$ succ. di Cauchy
Allora $(x_n)_n$ è convergente

nota
se in uno spazio metrico le succ. di Cauchy sono convergenti lo spazio metrico si dice spazio metrico completo

dim. la dim. si fa in 3 passi

1) ogni successione di Cauchy è una successione limitata

2) Applico il 2° di B.W. ottengo che una succ. di Cauchy ha sempre una sottosucc. convergente.

3) una Cauchy che ha una sottosucc. convergente è convergente.

1) Cauchy $\Rightarrow$ limitata.

$(x_n)_n$ Cauchy significa
$\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n}: \forall n, m \quad n,m>\bar{n} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

fisso $\varepsilon = 1$
$\exists \bar{n}: \quad \forall n,m \quad n,m>\bar{n} \Rightarrow |x_n - x_m| < 1$

allora $\forall n > \bar{n}, \quad |x_n - \underset{\text{fisso}}{x_{\bar{n}+1}}| < 1$

da $\bar{n}$ in poi tutti i punti della succ. sono in $[x_{\bar{n}+1} - 1, \; x_{\bar{n}+1} + 1]$

Allora $(x_n)_n$ è limitata

(prima di $\bar{n}$ ci sono un numero finito di termini; dopo $\bar{n}$ sono tutti in un intervallo fissato ampio 2)

2) gratis da 2° B.W.

3) Sia $(x_n)_n$ di Cauchy e sia $(x_{n_k})_k$ sottosucc. tale che $\lim_k x_{n_k} = \bar{x}$

faccio vedere che $\lim_n x_n = \bar{x}$.

(x_n) di Cauchy
$\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n}: \forall n,m, \quad n,m>\bar{n} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon/2$

$\lim_k x_{n_k} = \bar{x}$
$\forall \varepsilon>0, \exists \bar{k}: \forall k, \quad k>\bar{k} \Rightarrow |x_{n_k} - \bar{x}| < \varepsilon/2$

considero $n > \bar{n}$ e $k > \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$

$|x_n - \bar{x}| \leq \underbrace{|x_n - x_{n_k}|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|x_{n_k} - \bar{x}|}_{<\varepsilon/2}$

$n>\bar{n}$
$k>\bar{n} \Rightarrow n_k \geq k > \bar{n}$
$n>\bar{n}, \; n_k>\bar{n} \Rightarrow \; <\varepsilon/2$

regola delle sottosucc.
$n_k \geq k$

conclusione
se $n>\bar{n}$ allora $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon \quad \Rightarrow \lim_n x_n = \bar{x}$
CVD

Esempi

$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin x}{|x|}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x} \cdot \sin x}{\cancel{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x} \sin x}{-\cancel{x}} = 0$

il limite è 0.

Esercizi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \operatorname{sen} x}{|x|}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\cdot \operatorname{sen} x}{\cancel{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}\operatorname{sen} x}{-\cancel{x}} = 0$$

il limite è 0.

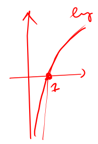
verificare se esiste, ed eventualmente calcolare

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\frac{1}{x}}$$

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\,\lg(f(x))}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\cdot \lg x \to -\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\cdot \underbrace{\lg x}_{-\infty} = -\infty$$



$$\lim_{x\to 0^-} (-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}\cdot \lg(-x) \to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot \lg(-x) \qquad -x = y$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \underbrace{-\underbrace{\frac{1}{y}}_{+\infty}}_{-\infty}\cdot \underbrace{\lg y}_{-\infty} = +\infty$$

il limite non esiste!

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\operatorname{sen} x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\operatorname{sen} x\cdot \lg x \to 0}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{0}\cdot \underbrace{\lg x}_{-\infty} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1}\cdot \underbrace{x\lg x}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\lg x \qquad \lg x = y \qquad = \lim_{y\to -\infty} e^{y}\cdot y = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\operatorname{sen} x\cdot \lg x \to 0}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{\operatorname{sen} x\,\lg x}-1}{\operatorname{sen} x\,\lg x}}_{1}\cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1}\cdot \underbrace{\lg x}_{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} e^{\sqrt{\cos x}\cdot \lg(\operatorname{tg} x)} = 1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\cos x}\cdot \lg\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = 0$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\cos x}\cdot \lg\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos x}\right)$$

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\cos x}\,\big(\lg(\operatorname{sen} x) - \lg \cos x\big)$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \underbrace{\underbrace{\sqrt{\cos x}}_{0}\cdot \underbrace{\lg(\operatorname{sen} x)}_{0}}_{0} - \underbrace{\sqrt{\cos x}\cdot \lg(\cos x)}_{0}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} -\sqrt{\cos x}\cdot \lg(\cos x) \qquad \cos x = y$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} -\sqrt{\cos x} \cdot \lg(\cos x) \qquad \cos x = y$$

$$= \lim_{y \to 0^+} -\underbrace{\sqrt{y}}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\lg y}_{\downarrow\, -\infty} = 0$$