7 novembre $\quad f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{P_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

E_1 $\quad f(x) = \sin(x)$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \longleftarrow$$

$P_{2n}(x) = ?$

$P_{2n+2}(x) = ?$

$$P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x) + \frac{\overbrace{\sin^{(2n+2)}(0)}^{0}}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$

Analogamente

$$P_{2n}(x) = P_{2n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$2(n-1)+1 = 2n-2+1 = 2n-1$

Osservazione 1: Se f è dispari i suoi polinomi di McLaurin non hanno monomi di grado pari

Osservazione Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari allora

$f(0) = f(-0) = -f(0) \qquad (f(-x) = -f(x) \ \forall x)$

$f(0) = -f(0) \iff 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$\left(\begin{array}{l} x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x-1 = 0 \\ \cancel{x(x-1) = 1 \Rightarrow x = 1 \quad x-1 = 1} \end{array} \right)$

Esercizio 1) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari (pari) e derivabile in $\mathbb{R}$. Allora f' è pari (dispari)

Esempio x^{2n+1} è dispari $(x^{2n+1})' = (2n+1)x^{2n}$ è pari

x^{2n} è pari e $(x^{2n})' = 2n\, x^{2n-1}$ è dispari (pari)

2) Più in generale se f è dispari allora $f^{(2n)}$ è dispari (pari) mentre $f^{(2n+1)}$ è pari (dispari)

Osservazione Se f è dispari allora

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Qui se k è pari $f^{(k)}$ è dispari $\Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$

Se f è pari allora

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x$$

$f(x) = \cos x$

$\cos^{(0)} x = \cos x$ $\qquad$ $\cos^{(4)}(x) = \cos x$

$\cos^{(1)} x = -\sin x$ $\qquad$ $\cos^{(5)}(x) = -\sin x$

$\cos^{(2)} x = -\cos x$ $\qquad$ $\cos^{(6)}(x) = -\cos x$

$\cos^{(3)} x = \sin x$ $\qquad$ $\cos^{(7)}(x) = \sin x$

$$\cos^{(2n+1)}(x)\Big|_{x=0} = \pm \sin x\Big|_{x=0} = 0$$

$$\cos^{(2n)}(x) \begin{cases} \cos x \\ -\cos x \end{cases}$$

$2n = 4q + r$ $\qquad$ $r = 0, 2$

$$\cos^{(2n)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{2n} \cos x = \left(\frac{d}{dx}\right)^{r} \left(\frac{d}{dx}\right)^{4} \cdots \left(\frac{d}{dx}\right)^{4} \cos x$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{r} \cos x = \cos^{(r)}(x)$$

$$\cos^{(2n)}(0) = \cos^{(r)}(0) \begin{cases} 1 & r=0 \\ -1 & r=2 \end{cases}$$

$$= (-1)^n$$

$$P_{2n}(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad k = 2j \quad j = 0, \dots, n$$

$$P_{2n}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\cos^{(2j)}(0)}{(2j)!} x^{2j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j}$$

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x) + \frac{\overbrace{\cos^{(2n+1)}(0)}^{0}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= P_{2n}(x)$$

$f(x) = x^2 \sin(x^3)$

calcola tutti i polinomi di McLaurin.

Teorema (Formule di Peano) $n \geq 0$ fissato

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto, $x_0 \in I$, ed esistano $f^{(0)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ (per $n=0$ assumiamo che f sia continua in x_0). Si consideri

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

e si ponga $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ in I.

Allora $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad (1_n)$$

Dim Si tratta di dimostrare che

$$(1_n) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad \text{perché } R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Per $n=0$ questo limite è vero, $P_0(x) = f(x_0) = f^{(0)}(x_0)$

(1_0) è $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$ per la continuità di f nel punto x_0. Perciò (1_0) è vera.

$$(1_n) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \text{per } n \geq 1$$

qui $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^n = 0$ $\quad \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - P_n(x)\right) = f(x_0) - P_n(x_0) =$

$$= f(x_0) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x_0-x_0)^j$$

$$= f(x_0) - \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x_0-x_0)^0$$

$$= f(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(1)}(x) - P_n^{(1)}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \qquad \frac{0}{0} \qquad \text{se } n > 1$$

(perché se $n=1$ per la 1° regola Hopital $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} = f'(x_0) - P_1'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$)

$$= \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} \qquad \frac{0}{0}$$

Qui $\lim_{x \to x_0} n!\,(x-x_0) = 0$

$\lim_{x \to x_0} \left(f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)\right) = f^{(n-1)}(x_0) - P_n^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n-1)}(x_0) = 0$

1° regola Hôpital

$$= \frac{f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

Lemma Sia $p(x)$ un polinomio con $\deg p \leq n$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo che $p(x) = o((x-x_0)^n)$.
Allora $p \equiv 0$.

Dim Risulta

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Per ipotesi $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Voglio verificare che questo implica che $p^{(k)}(x_0) = 0$ $\forall\, k = 0, \dots, n$.

Se no ovvero non è vero

allora avremmo

$$p(x) = \frac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}(x-x_0)^{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

con $p^{(k_0)}(x_0) \neq 0$ con $0 \leq k_0 \leq n$

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}(x-x_0)^{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}(x-x_0)^{k_0}}{(x-x_0)^n} \underbrace{\left(1 + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{\frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{\frac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}(x-x_0)^{k_0}}\right)}_{1}$$

$$0 = \frac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!} \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{-(n-k_0)} = \begin{cases} \dfrac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!} \neq 0 & \text{se } k_0 = n \\ \text{sempre} \neq 0, \text{ quando esiste} \end{cases}$$

Assurdo

$$\Rightarrow p^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall\, 0 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow p(x) \equiv 0.$$