Lezione 23 - 7/11/2025

Le Serie

oss. L'operazione di somma si fa fra 2 numeri
se ho un numero finito di elementi
$a_0, a_1, \dots, a_n$
so cosa significa $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$

Cosa succede se ho una successione $(a_n)_n$

non si possono sommare infiniti numeri

idea: utilizzare la nozione di limite

(SERIE)

def. Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri di $\mathbb{R}$
definiamo una nuova successione $(s_n)_n$
dove
$s_0 = a_0$
$s_1 = a_0 + a_1$
$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$
$\vdots$
$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$
$\vdots$

$s_0 = a_0$
$\forall n \geq 1$
$s_n = a_n + s_{n-1}$
def per ricorrenza (o per induzione)

la coppia $((a_n)_n, (s_n)_n)$ la diciamo
serie e la indico con $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$

- a_n si dice "termine n-esimo della serie"
- $(a_n)_n$ si dice "termine generale della serie"
- s_n si dice "somma parziale n-esima della serie"
  o anche "ridotta n-esima"
- $(s_n)_n$ si dice "successione delle ridotte della serie"
  o "successione delle somme parziali".
- diciamo "somma della serie"
  il valore (se esiste finito) $\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$

oss. il valore s è il surrogato della somma di infiniti termini.

def. sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a valori in $\mathbb{R}$

se $\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$ diremo che
la serie è convergente con somma s

se $\lim_n s_n = +\infty$ oppure $\lim_n s_n = -\infty$
diremo che la serie è divergente (a $+\infty$ ovvero a $-\infty$)

se $\lim_n s_n$ non esiste in $\widetilde{\mathbb{R}}$ diremo che
la serie è indeterminata

- il fatto di essere convergente, divergente o indeterminata
si dice carattere della serie

Esempi. fissiamo $\rho \in \mathbb{R}$

consideriamo $a_n = \rho^n$

cioè consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$

serie geometrica di ragione ρ

supponiamo $\rho = 1$

termine n-esimo è $1^n = 1$

termine generale è $(\rho^n)_n = (1^n)_n$

è la successione costante 1

la somma n-esima è

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 1+1 = 2$$
$$s_2 = 1+1+1 = 3$$
$$\vdots$$
$$s_n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1} = n+1$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ è divergente

la successione delle ridotte è $(s_n)_n = (n+1)_n$

$$\lim_n (n+1) = +\infty$$

prendiamo $\rho \neq 1$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n$ con $\rho \neq 1$

$$s_n = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^n = \frac{\rho^{n+1} - 1}{\rho - 1} \quad (\text{se } \rho \neq 1)$$

$$\lim_n \frac{\rho^{n+1} - 1}{\rho - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \rho^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \rho > 1 \\ 0 & 0 < \rho < 1 \\ 0 & \rho = 0 \\ 0 & -1 < \rho < 0 \\ \text{non esiste} & \rho \leq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{\rho - 1} = \dfrac{1}{1-\rho} & \text{se } -1 < \rho < 1 \\ +\infty & \rho > 1 \\ \text{non esiste} & \rho \leq -1 \end{cases}$$

conclusione $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n$ $\begin{cases} \text{convergente se} & |\rho| < 1 \\ \text{divergente a } +\infty & \text{se } \rho \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } \rho \leq -1 \end{cases}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è convergente con somma $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

termine generale $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

ridotta n-esima

$$s_0 = 1 \qquad 1 = 2 - 1$$
$$s_1 = 1 + \tfrac{1}{2} \qquad \tfrac{3}{2} = 2 - \tfrac{1}{2}$$
$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \qquad \tfrac{7}{4} = 2 - \tfrac{1}{4}$$
$$s_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \qquad \tfrac{15}{8} = 2 - \tfrac{1}{8}$$
$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{31}{16} = 2 - \tfrac{1}{16}$$
$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \dots + \tfrac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_n s_n = 2$$

Esempio sia $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

sto considerando $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

Esempio sia $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

sto considerando $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

si dice serie armonica

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

che carattere ha?

$(s_n)_n$ è crescente.
- o è convergente
- o è divergente a $+\infty$

È divergente!

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} \geq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}$

$s_8 \geq 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$s_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$

$s_{16} = s_8 + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16}}_{\text{sono 8 tutti} \geq \frac{1}{16}} \geq s_8 + \frac{8}{16} = s_8 + \frac{1}{2}$

$s_8 \geq 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$\geq 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$

$s_{2^n} \geq s_{2^{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\text{sono } 2^{n-1}} \geq s_{2^{n-1}} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}$

$\geq s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2}$

OK

conclusione: ho $s_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$ 10

$\lim_n s_{2^n} \geq \lim_n 1 + \frac{n}{2} = +\infty$

essendo $(s_n)_n$ crescente, $\lim_n s_n = +\infty$

oss. vedremo che $s_n \sim \log n$

$\lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}\right) - \log(n+1) = \gamma \in]0, 1[$

costante di Eulero-Mascheroni

- $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ (serie armonica) è divergente}}$

• ES. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

serie armonica a segni alternati

vedremo che è convergente (con somma $\lg 2$)

• ES $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serie di Mengoli

termine generale $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 6}, \dots$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30},$

$s_1 = \frac{1}{2}$

$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

! $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$!

$s_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$ $\lim_n s_n = \lim_n 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente con somma 1

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

serie armonica generalizzata (di parametro 2)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

vedremo che è convergente

quanto vale la somma? $\frac{\pi^2}{6}$

2 risultati generali

1) condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza di una serie.

Teorema. data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

se è convergente allora $\lim_n a_n = 0$

dim. osserviamo che $a_n = s_n - s_{n-1}$

$s_n = a_0 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$s_{n-1} = a_0 + \dots + a_{n-1}$

dim. osserviamo che $a_n = s_n - s_{n-1}$

$s_n = a_0 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$s_{n-1} = a_0 + \dots + a_{n-1}$

supponiamo che $\sum_{n=0}^{n} a_n$ è convergente

cioè

$$\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$$

allora $\lim_n s_{n-1} = s$

allora $\lim_n a_n = \lim_n s_n - s_{n-1} = s - s = 0$

$s_n \to s$, $s_{n-1} \to s$

CVD

¿ perché non è sufficiente questa condizione (per avere la convergenza) ?

per esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ $\quad a_n \to 0$ e $s_n \to +\infty$

$\sum_n \rho^n$ $\quad \rho \geq 1$ $\quad \lim_n \rho^n = \begin{cases} 1 & \rho = 1 \\ +\infty & \rho > 1 \end{cases}$

$\rho \leq -1$ $\quad \lim_n \rho^n$ non esiste

Teorema (criterio di convergenza di CAUCHY)

sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie in $\mathbb{R}$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente se e solo se

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k$

$n > \bar{n}$ e $k \geq 1 \Rightarrow |s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = |a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1}|$

dim. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente

$\Updownarrow$ ← definizione di convergenza

$\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ ← teorema di completezza

$(s_n)_n$ è succ. di CAUCHY

$(s_n)_n$ di Cauchy significa

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, m \ , \ n, m > \bar{n} \Rightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon$

$n, m > \bar{n} \Leftrightarrow$ possiamo supporre (senza perdere in generalità) che $n > \bar{n}$,

$m > n > \bar{n}$

m lo penso come $n + k$ con $k \geq 1$

riscrivo la condizione di CAUCHY per $(s_n)_n$ e ottengo.

riscrivo la condizione di CAUCHY per $(s_n)_n$ e ottengo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k \quad n > \bar{n}, k \geq 1$$

$$\Longrightarrow \left| \underbrace{s_{n+k} - s_n}_{} \right| < \varepsilon$$

$$\left(\stackrel{\shortparallel}{s_m} \right)$$

CVD