SOTTOALGEBRA DI CARTAN E CARTAN-WEYL BASIS

- Data alg. di Lie $\mathcal{G}$, un elemento $a \in \mathcal{G}$ si dice semisemplice se $ad(a)$ è un operatore semisemplice (cioè DIAGONALIZZABILE).

- Una sottoalgebra TORALE $t \subset \mathcal{G}$ è una sottoalgebra i cui elementi sono tutti SEMISEMPLICI.

→ Una sottoalg. torale t è sempre ABELIANA

Dim. Se non lo fosse, $\exists x \in t$ con un autovett. $y \in t$; questo perché $ad(x)|_t$ non sarebbe la matrice nulla e quindi esisterebbe uno zero $\lambda \neq 0$ del suo polinomio caratteristico.
Allora si avrebbe $[x,y] = \lambda y$, $\lambda \neq 0$.
Sullo sp. due-dim. spannato da x e y, y agisce come $[y,x] = -\lambda y$ $[y,y]=0$, che è rappresentato da matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente e non-diag.
$\Rightarrow$ y non è semisemplice. //

$\Rightarrow$ $ad(a)$ con $a \in t$ sono simultaneam. diagonalizzabili.

Consideriamo un'alg. di Lie semplice.

- La sua sottoalgebra torale massimale è chiamata la **SOTTOALGEBRA DI CARTAN** $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ t.c. $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H} \quad [h_1, h_2] = 0$

  (massimale nel senso che non esiste una sottoalg. torale che contiene $\mathcal{H}$.)

  La dim. della sottoalg. di Cartan r è detta **RANGO** dell'alg. di Lie $\mathcal{G}$.

- Posso scegliere una base $\hat{H}^1, \dots, \hat{H}^r$ di $\mathcal{H}$.

- Consideriamo la rep. aggiunta. $\hat{H}^1, \dots, \hat{H}^r$ sono operatori lineari su $\mathcal{G}$ che commutano tra loro; inoltre $\mathcal{H}$ è una sottoalgebra TORALE (cioè tutti i suoi elem. sono semi-semplici e quindi $ad(h)$ è diagonalizz. $\forall h \in \mathcal{H}$).

  $\Rightarrow \hat{H}^i$ possono essere diagonalizzati simultaneamente:

$$[\hat{H}^i, E_\alpha] = \alpha^i E_\alpha$$

(Per ora deg $(\alpha^1, \dots, \alpha^r)$ non è fissata.)

$\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^r)$ sono autovalori di vett. E_α rispetto agli op. lineari $\hat{H}^1, \dots, \hat{H}^r$.

- Siccome $\mathcal{H}$ è massimale, $\alpha \neq 0$. Inoltre $\hat{H}^i$ sono autovett. relativi a $(0, \dots, 0)$.

- Per ogni algebra di Lie $\mathcal{G}$ semisempl., esiste sempre una sottoalg. di Cartan non-triviale.
Infatti ogni elem. di $\mathcal{G}$ ammette una Jordan decomposition ($a \in \mathcal{G} \Rightarrow a = a_s + a_n$ con $[a_s, a_n] = 0$, a_s semisemplice e a_n nilpotente). Se a fosse nilpotente $\forall a \in \mathcal{G}$, l'algebra $\mathcal{G}$ sarebbe nilpotente. Ma allora $\exists b$ t.c. $\forall a$ $K(a, b) = 0$, cioè $b \in \underbrace{[\mathcal{G}, [\mathcal{G}, \dots [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \dots]}_{K-1} \Rightarrow K$ deg. $\Rightarrow \mathcal{G}$ non sarebbe semisempl.

- Siccome tutti gli elementi di $\mathcal{H}$ commutano tra loro, essi possono tutti essere simultaneam. diagonalizzati (infatti una volta diagonalizzati $\hat{H}^i$, ogni loro combinazione lin. è diagonale).

$$\Rightarrow \quad [h, E_\alpha] = \alpha(h) E_\alpha$$

autovalore relativo ad operatore $ad(h)$

$\alpha(h) \in \mathbb{C}$ e dip. linearm. da $h \Rightarrow$

sp. vett. duale a $\mathcal{H}$

$\Rightarrow \alpha$ è un FUNZIONALE LINEARE su $\mathcal{H} \longrightarrow \alpha \in \mathcal{H}^* = \{\lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \text{ lineari}\}$

$$\rightsquigarrow L_\alpha = \{x \in \mathcal{G} \mid [h, x] = \alpha(h) x, \forall h \in \mathcal{H}\} \qquad L_0 = \{x \in \mathcal{G} \mid [h, x] = 0, \forall h \in \mathcal{H}\}$$

autosp. con autoval. α

$\boxed{\text{Denotiamo l'INSIEME DELLE ROOT con } \Delta.}$

- La forma di Killing k ristretta ad L_0 è non-degenere.
  L_α e L_β sono ortogonali rispetto k, a meno che $\alpha+\beta=0$.

Dim. Decomponiamo $\mathcal{G}$ in autosp. per $\mathcal{H}$: $\mathcal{G} = L_0 \bigoplus_{\alpha\in\Delta} L_\alpha$.

Se $a \in L_\alpha$, $b \in L_\beta$ e $h \in \mathcal{H}$ abbiamo

$$\alpha(h)\, k(a,b) = k([h,a],b) = -k(a,[h,b]) = -\beta(h)\, k(a,b)$$

Se $\alpha+\beta \neq 0 \Rightarrow k(a,b)=0 \quad \Rightarrow L_\alpha \perp L_\beta$ se $\beta \neq -\alpha$.

Inoltre $\forall \alpha\in\Delta$, $\forall a \in L_\alpha$, $\forall h \in L_0$ e $\forall h' \in \mathcal{H} \subseteq L_0$ k non-deg.

$$\alpha(h')\, k(a,h) = k([h',a],h) = -k(a,[h',h]) = -k(a,0) \overset{\downarrow}{=} 0$$

Siccome $\exists h' \in \mathcal{H}$ t.c. $\alpha(h') \neq 0 \Rightarrow k(a,h)=0$ $\quad \forall a \in L_\alpha\ \forall \alpha\in\Delta\ \forall h \in L_0$

Qto implica che $k|_{L_0}$ è non-deg., altrim. $\exists h' \in L_0$ t.c. $k(h,h')=0$ $\forall h \in L_0$, ma allora $\exists h'$ t.c. $k(x,h')=0$ $\forall x \in \mathcal{G}$ contraddicendo che k è non-deg.

- $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$ and if $\alpha+\beta \notin \Delta$ then $[L_\alpha, L_\beta]=0$.

Dim. $[h,[a,b]] = [[h,a],b] + [a,[h,b]] = (\alpha(h)+\beta(h))[a,b]$.

cioè $[a,b] \neq 0$ è un autovett. di $\mathcal{H}$ con autovalore $\alpha+\beta$.

Ma se $\alpha+\beta \notin \Delta$, questo non può avvenire e quindi $[a,b]=0$.

- κ ristretta ad $\mathcal{H}$ è non-degenere.

Dim. Poiché $\kappa|_{L_0}$ è non-deg $\Rightarrow$ L_0 è un'alg. di Lie

$a \in L_0 \Rightarrow a = a_s + a_n$. In $\mathcal{H}$: $ad(a)=0 \Rightarrow ad(a_{s,n}) = ad(a)_{s,n} = 0$

$\Rightarrow [a_s, h] = 0 = [a_n, h]$ $\forall h \in \mathcal{H}$ $\Rightarrow a_s, a_n \in L_0$.

Siccome $\mathcal{H}$ è sottoalg. torale massimale, $a_s \in \mathcal{H}$. Quindi $\mathcal{H}$ contiene le parti semisemplici di tutti gli elementi di L_0.

Ora proviamo che $\kappa|_{\mathcal{H}}$ è non-deg: assumiamo ~~p~~ assurdo che $\exists h \in \mathcal{H}$ t.c. $\kappa(h, h') = 0$ $\forall h' \in \mathcal{H}$.

Prendiamo $a = a_s + a_n \in L_0$. Allora $ad(h)\,ad(a_n)$ è nilpotente, poiché $[h, a_n] = 0$, e quindi ha traccia nulla $\Rightarrow \kappa(h, a_n) = 0$.

Inoltre $a_s \in \mathcal{H} \Rightarrow \kappa(h, a_s) = 0$. $\Rightarrow \kappa(h, a) = 0$ $\forall a \in L_0$

e quindi κ sarebbe deg. su L_0; ma questo falsifica quanto dim. sopra. //

- $\mathcal{H} = L_0$.

Dim. $L_0 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$, dove $\mathcal{H}^\perp$ è il complemento ortogon. risp. κ.

$\mathcal{H}^\perp$ è composto da elem. nilpotenti.

$\mathcal{H}^\perp$ è un ideale di L_0: $c \in \mathcal{H}^\perp, a \in L_0$ $[c, a] \in \mathcal{H}^\perp$ perché

$\forall h \in \mathcal{H}$ $\kappa(h, [a, c]) = \kappa([h, a], c) = 0$.

In particolare $\mathcal{H}^\perp$ è un'algebra di Lie ($[c, c'] \in \mathcal{H}^\perp$) di

elem. nilpotenti $\Rightarrow$ $\kappa|_{\mathcal{H}^\perp} = 0$ $\quad \kappa(c, c') = tr(\underset{\text{matrici nilpot.}}{ad(c)\,ad(c')})$ $\leftarrow$ $\exists$ base t.c. possono essere messe entrambe in forma triang. sup. (Engel's theorem)

Preso $c \in \mathcal{H}^\perp \Rightarrow \begin{cases} \kappa(c, c') = 0 & \forall c' \in \mathcal{H}^\perp \\ \kappa(c, h) = 0 & \forall h \in \mathcal{H} \end{cases} \Rightarrow \kappa(c, a) = 0 \quad \forall a \in L_0$

$\Rightarrow c = 0$ perché $\kappa|_{L_0}$ è non-deg.

$\Rightarrow L_0 = \mathcal{H}$. //

- Se $\alpha \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta$, cioè $\exists E_{-\alpha}$ s.t. $[h, E_\alpha] = -\alpha(h) E_{-\alpha}$.

Dim. Se ciò non fosse vero, allora E_α sarebbe $\perp$ a tutti vett. di base di $\mathfrak{g}$:

$$k(E_\alpha, h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

$$k(E_\alpha, E_\beta) = 0 \quad \forall \beta \neq -\alpha \text{ (incluso } \beta = \alpha)$$

$\Rightarrow E_\alpha = 0$ oppure k deg. entrambe violano ipotesi. //

- K bilineare, simmetrica e non-deg su $\mathcal{H}$ (campo $\mathbb{C}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ posso scegliere base $\{H^1, \dots, H^r\}$ t.c.

$$K(H^i, H^j) = \delta^{ij}$$

(Qta base è definita a meno di $SO(r)$ rotations.)

- $\mathfrak{g} = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} L_\alpha$.

Inoltre, poiché k è non-deg., possiamo usarla per costruire un ISOMORFISMO $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{H}^*$ tra l'alg. di Cartan e il suo spazio duale $\mathcal{H}^* = \{$sp. dei funz. lin. su $\mathcal{H}\}$:

per ogni root α, $\exists\, h_\alpha \in \mathcal{H}$ t.c.

$$k(h, h_\alpha) = \alpha(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

$h_\alpha = c^i H^i \rightarrow c^j = k(H^j, h_\alpha) = \alpha(H^j) = \alpha^j \Rightarrow h_\alpha = \alpha^i H^i$

Se scegliamo base H^i o.n. (vedi alla fine)

solo per H^i base o.n.

- Dati $\alpha \in \Delta$, $a \in L_\alpha$, $b \in L_{-\alpha}$ abbiamo

$$[a,b] = k(a,b)\, h_\alpha$$

Inoltre $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = \mathbb{C} h_\alpha$.

Dim. $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \subseteq \mathcal{H}$. Dati $h \in \mathcal{H}$, $a \in L_\alpha$, $b \in L_{-\alpha}$

$$k(h,[a,b]) = k([h,a],b) = \alpha(h)\, k(a,b) = k(h,h_\alpha)\, k(a,b) =$$
$$= k(h, k(a,b) h_\alpha) \Rightarrow k(h, [a,b] - k(a,b) h_\alpha) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

Siccome $k|_{\mathcal{H}}$ è non-deg, $[a,b] = k(a,b)\, h_\alpha$. //

- $k(h_\alpha, h_\alpha) = \alpha(h_\alpha) \neq 0$.

Dim. Possiamo riscalare a, b in modo da trovarli t.c. $k(a,b) = 1$; per cui abbiamo $[a,b] = h_\alpha$. Inoltre $[h_\alpha, a] = \alpha(h_\alpha) a$, $[h_\alpha, b] = -\alpha(h_\alpha) b$. Se fosse $\alpha(h_\alpha) = 0$ avremmo che a, b, h_α spannano una sottoalg. nilpot. e h_α risulta essere rappr. da una matrice nilpotente (Lie's theorem); ma $h_\alpha \in \mathcal{H}$ e quindi dovrebbe essere anche semisempl. $\Rightarrow ad(h_\alpha) = 0$, ma $h_\alpha \neq 0$ (se h_α fosse $= 0 \Rightarrow 0 = k(h_\alpha, h) = \alpha(h)$ $\forall h$, ma allora $\alpha = 0$.) //

- Esistono elem. $E_\alpha \in L_\alpha \quad E_{-\alpha} \in L_{-\alpha} \quad H_\alpha \in \mathcal{H}$ che soddisfano le regole di commutazione di $sl(2,\mathbb{C})$.

Dim. Definiamo $H_\alpha \equiv \frac{1}{2}[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \frac{1}{2} k(E_\alpha, E_{-\alpha}) h_\alpha$.

Normalizziamo $E_\alpha, E_{-\alpha}$ t.c. $k(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \dfrac{2}{k(h_\alpha, h_\alpha)}$

$\Rightarrow H_\alpha = \dfrac{h_\alpha}{k(h_\alpha, h_\alpha)}$.

Allora $[H_\alpha, E_\alpha] = \alpha\left(\dfrac{h_\alpha}{k(h_\alpha,h_\alpha)}\right) E_\alpha = \dfrac{1}{k(h_\alpha,h_\alpha)} \underset{k(h_\alpha,h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)} E_\alpha = E_\alpha$

$[H_\alpha, E_{-\alpha}] = \ldots = -E_{-\alpha}$. //

- La Killing form definisce un prodotto anche su $\mathcal{H}^*$:

$(\alpha,\beta) \equiv k(h_\alpha, h_\beta) = \alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha) = (\alpha,\alpha)\, \beta(H_\alpha)$.

In particolare $2\beta(H_\alpha) = \dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \equiv \langle \beta | \alpha \rangle$

- Data una root $\alpha \rightsquigarrow sl_\alpha(2,\mathbb{C}) = \langle E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha \rangle$.

Possiamo allora decomporre $\mathcal{G}$ in somma diretta di irrep di $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$. $\mathcal{G} = \bigoplus_j V_{R_j}^{(\alpha)}$

Gli highest weight states sono autovett. anche per $\mathcal{H}$.

Dim. {Highest weight states} $= \{ a \in \mathcal{G} \mid [E_\alpha, a] = 0 \} \equiv U$.

Preso $h \in \mathcal{H}$, $[E_\alpha, [h,a]] = [[E_\alpha, h], a] = -\alpha(h)[E_\alpha, a] = 0$

$\Rightarrow [h,a] \in U$. Siccome gli h sono diagonalizzabili simult., possiamo trovare una base di U di autovett. di $\mathcal{H}$. //

- Dato un highest weight state $|j\rangle$, esso genera una irrep $(2j+1)$ dim.
Se abbiamo $|j\rangle$, applichiamo J_3 $(J_3|j\rangle = j|j\rangle)$ e leggiamo j e dim.

Prendiamo $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$. I suoi highest weight states $|j\rangle$ sono

1) Cartan $h \in H$ t.c. $\alpha(h)=0$ $\quad ([E_\alpha, h] = -\alpha(h) E_\alpha)$

$\longrightarrow$ qti generano un SINGOLETTO di $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$: infatti
$[E_{-\alpha}, h] = \alpha(h) E_{-\alpha} = 0$ e inoltre $[H_\alpha, h] = 0 \cdot h$ $\Rightarrow$ dim $= 0+1 = 1$.

2) Root vectors E_β t.c. $\alpha+\beta \notin \Delta$, e quindi $[E_\alpha, E_\beta]=0$.

Siccome $[H_\alpha, E_\beta] = \underline{\beta(H_\alpha)} E_\beta$ $\Rightarrow \begin{cases} j = \beta(H_\alpha) \\ \text{dim} = 2\beta(H_\alpha)+1 \end{cases}$

Una di queste irrep è l'alg. $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$ stessa.

- Abbiamo in particolare dim. che quando $[E_\alpha, E_\beta]=0$

$$2\beta(H_\alpha) = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{N}.$$

Vale più in generale che

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha,\beta \in \Delta$$

Dim. Una generica root β appartiene a una α-string che parte da un certo $\hat\beta$, cioè $\beta = \hat\beta - k\alpha$ con $k \in \mathbb{N}$. Allora

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2(\alpha,\hat\beta - k\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2(\alpha,\hat\beta)}{(\alpha,\alpha)} - 2k \in \mathbb{Z} \quad //$$

- Siano $\alpha, \beta \in \Delta$, $E_\beta \in L_\beta$ e $sl_\alpha(2,\mathbb{C}) = \text{Span}(E_\alpha, H_\alpha, E_{-\alpha})$

E_β farà parte di una IRREP finito-dim. di $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$.

- $[H_\alpha, E_\beta] = \beta(H_\alpha) E_\beta = m E_\beta$
- $\exists p \in \mathbb{N}$ t.c. $ad(E_\alpha)^{p+1} E_\beta \propto ad(E_\alpha) \overbrace{E_{\beta+p\alpha}}^{|j\rangle} = 0$
- $\exists q \in \mathbb{N}$ t.c. $ad(E_{-\alpha})^{q+1} E_\beta \propto ad(E_{-\alpha}) \underbrace{E_{\beta-q\alpha}}_{|-j\rangle} = 0$

$\Rightarrow \quad m = j - p = -j + q \quad \Rightarrow \begin{cases} j = \frac{p+q}{2} \\ m = \frac{q-p}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 2\beta\left(\frac{h_\alpha}{|\alpha|^2}\right) = 2\beta(H_\alpha) = 2m = -(p-q)$$

↑ Qto numero da info su p e q.

- p, q t.c. $\beta + p\alpha$ e $\beta - q\alpha$ sono ancora root, ma $\beta + (p+1)\alpha$ e $\beta - (q+1)\alpha$ NON sono roots: $[E_\alpha, L_{\beta+p\alpha}] = 0 = [E_{-\alpha}, L_{\beta-q\alpha}]$

La successione

$$\beta - q\alpha,\ \beta - (q-1)\alpha,\ \dots,\ \beta,\ \dots,\ \beta + (p-1)\alpha,\ \beta + p\alpha$$

è chiamata α-string attraverso β.

• Per ogni root α, $\dim L_\alpha = 1$.

Inoltre se $\alpha \in \Delta$, $c\alpha \in \Delta \iff c = \pm 1$.

Dim. Consideriamo $M_\alpha \equiv \bigoplus_{\substack{\beta = c\alpha \quad c\in\mathbb{Z} \\ \beta\in\Delta}} L_\beta \oplus \langle H_\alpha \rangle$

Qta è una rep. di $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$ e i pesi sono INTERI

siccome $[E_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$: $\left(\alpha(H_\alpha) = \frac{(\alpha,\alpha)}{C_\alpha(\alpha)} = 1 \right)$

$[E_{\pm\alpha}, H_\alpha] = \mp E_{\pm\alpha}$, $\quad [E_{\pm\alpha}, L_{c\alpha}] \subset L_{(c\pm 1)\alpha}$

$[H_\alpha, L_{c\alpha}] = c\,\alpha(H_\alpha) L_{c\alpha} = c\, L_{c\alpha} \qquad [H_\alpha, H_\alpha] = 0$.

Vediamo che l'unico autovettore di H_α in M_α con autovalore zero è H_α stesso. Inoltre, tutte le irrep di $sl(2,\mathbb{C})$ con pesi INTERI hanno un vett. con peso zero!

$\implies$ M_α è una rep. IRRIDUCIBILE

(infatti se fosse riducibile, M_α si scomporrebbe in più di una irrep con pesi interi e quindi ci sarebbero più di un vett. con peso zero.)

$\implies \begin{cases} \bullet\, M_\alpha = sl_\alpha(2,\mathbb{C}) \text{ perché } sl_\alpha(2,\mathbb{C}) \subset M_\alpha \text{ ed è irrep.} \\ \qquad \implies M_\alpha = \langle H_\alpha \rangle \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha} \implies \text{per ogni root } \alpha,\ c\alpha \text{ è root se e solo se } c = \pm 1. \\ \bullet\, \dim L_\alpha = 1. \end{cases}$

//

- Se $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$, allora $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Dim. Data $\beta \in \Delta$, consideriamo tutte le possibili root del tipo $\beta + k\alpha$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Def. $P_\beta = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} L_{\beta+k\alpha}$. Qto sp. è una rep. di $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$

Il peso sotto H_α di un vett. in $L_{\beta+k\alpha}$ è $(\beta+k\alpha)(H_\alpha) = \beta(H_\alpha) + k$

Qti numeri sono tutti distinti e sono o tutti interi o tutti semi-interi.

$\Rightarrow P_\beta$ è una IRREP di $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$.

In una irrep di $sl(2,\mathbb{C})$ se u è t.c. $t_3 u = \lambda u$ e si sa che $\lambda+1$ è un peso, allora $t_+ u$ è un vett. di peso $\lambda+1$.

Sia $\alpha \in \Delta$; se $\beta \in \Delta \Rightarrow L_\beta$ è non vuoto e E_β t.c. $[H_\alpha, E_\beta] = \underbrace{\beta(H_\alpha)}_{\lambda} E_\beta$

Se $\beta+\alpha \in \Delta$, allora $(\beta+\alpha)(H_\alpha) = \beta(H_\alpha) + 1 \Rightarrow E_{\beta+\alpha}$ è weight state con peso $\beta(H_\alpha)+1$ e qndi è generato da E_α, cioè

$L_{\beta+\alpha} = [E_\alpha, L_\beta]$. //

- L'intero $\langle\beta|\alpha\rangle \equiv \dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 2\beta(H_\alpha)$ è chiamato Cartan integer.

$\langle\beta|\alpha\rangle$ è lineare in β, ma non in α.

- Si ha che $k(h,h') = \frac{1}{2\gamma} \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\alpha(h')$, $\quad h,h' \in \mathcal{H}$.

Dim. Per $h,h' \in \mathcal{H}$, $[ad(h), ad(h')] = 0 \Rightarrow$ possono essere diag. simult.

$$ad(h) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha(h) \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}r \\ \}\#\text{roots} \end{array} \qquad ad(h') = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha(h') \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad k(h,h') = \frac{1}{2\gamma} tr\left(ad(h)\, ad(h')\right) = \underbrace{0 + \dots + 0}_{r} + \frac{1}{2\gamma} \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\alpha(h'). \qquad //$$

$$\Rightarrow \quad r = \sum_{i,j} \delta^{ij} K(H^i, H^j) = \sum_{i,j} \delta^{ij} \frac{1}{2\gamma} \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha^i \alpha^j = \frac{1}{2\gamma} \sum_{\alpha \in \Delta} |\alpha|^2 \qquad (\cdot)$$

con $|\alpha|^2 = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i \alpha^i$

$\rightsquigarrow$ rimane libertà di fissare normalizz. γ di Killing form; fissare γ vuol dire fissare la normalizz. delle roots: $\gamma = \dfrac{\sum_\alpha |\alpha|^2}{2r}$ $\leftarrow$ α^i relative to H^i s.t. $k(H^i, H^j) = \delta^{ij}$ changing γ, H^i satisfying $\uparrow$ get rescaled and so their eigenvalues

- $(\alpha, \beta) \equiv K(h_\alpha, h_\beta) = \alpha(h_\beta) = \sum_i \alpha(\beta^i H^i) = \sum_i \alpha^i \beta^i$

  e $|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha)$.

- Le roots generano $\mathcal{H}^*$.

Dim. Se $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \langle\alpha\rangle$ fosse un sottosp. vett. proprio di $\mathcal{H}^*$, allora $\exists\, \hat{h}\in\mathcal{H}$ t.c. $\alpha(\hat{h})=0 \quad \forall\alpha\in\Delta$; ma allora

$$K(h,\hat{h}) = \sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(h)\alpha(\hat{h})=0 \quad \forall h\in\mathcal{H}$$ e K sarebbe deg. su $\mathcal{H}$. //

- Se prendiamo $V \equiv \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}h_\alpha$ (sp. vett. reale generato dai h_α), la Killing form su V è def. positiva.

Dim. Per una root β

$$(\beta,\beta) = K(h_\beta,h_\beta) = \sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(h_\beta)^2 = \sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha,\beta)^2 = 2\sum_{\alpha\in\Phi_+}(\alpha,\beta)^2$$

metà delle roots

(Nell'ultima uguaglianza: $\forall\alpha$ anche $-\alpha$ è root, quindi $\forall\alpha$ scelgo una delle due; inoltre $(-\alpha,\beta)^2=(\alpha,\beta)^2$.)

$$\Rightarrow \frac{2}{(\beta,\beta)} = \frac{2}{(\beta,\beta)^2}(\beta,\beta) = \sum_{\alpha\in\Phi}\frac{4(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)^2} = \langle\alpha|\beta\rangle^2 \in\mathbb{N}.$$

$$H_\alpha = \frac{h_\alpha}{K(h_\alpha,h_\alpha)}$$

$$\Rightarrow \beta(h_\alpha) = \underbrace{(\alpha,\alpha)}_{\in 2/\mathbb{N}}\,\underbrace{\beta(H_\alpha)}_{\in \mathbb{N}/2} \in \mathbb{Q}$$

Prendiamo $h\in V=\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathbb{R}h_\alpha \qquad h=\sum_{\alpha\in\Phi}a_\alpha h_\alpha \qquad a_\alpha\in\mathbb{R}$

$$K(h,h) = \sum_{\beta\in\Phi}\beta(h)^2 = \sum_{\beta\in\Phi}\Big|\sum_{\alpha\in\Phi}\underbrace{a_\alpha}_{\in\mathbb{R}}\,\underbrace{\beta(h_\alpha)}_{\in\mathbb{Q}}\Big|^2 \in\mathbb{R}^{>0}. \quad //$$

- Possiamo collezionare le regole di commutazione di tutti i generatori.

- Siccome $\dim L_\alpha = 1$, $L_\alpha = \mathrm{Span}(E_\alpha)$

- Per ogni root $\alpha \rightsquigarrow E_\alpha$ (def. a meno di normalizzazione)
  $\#$ roots $= \dim G - \dim H = d - r$
  $\rightsquigarrow$ Base : H^i $i = 1, \dots, r$ e E_α $\alpha \in \Delta$

- Regole di commutazione :

$$\boxed{\begin{aligned} &[H^i, H^j] = 0 \\ &[H^i, E_\alpha] = \alpha^i E_\alpha \\ &[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{se } \alpha + \beta \in \Delta \\ 2\dfrac{\alpha \cdot H}{|\alpha|^2} = 2H_\alpha & \text{se } \alpha = -\beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}}$$

Cartan - Weyl
BASIS

$N_{\alpha\beta}$ sono cost. $\neq 0$.

ESEMPIO: $sl(3,\mathbb{C})$

Consideriamo l'alg. di Lie

$$sl(3,\mathbb{C}) = \{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \}$$

Alg. di Lie di $SL(3,\mathbb{C})$
$\rightsquigarrow SU(3)$ come forma reale.

- $\dim sl(3,\mathbb{C}) = 8$.

- Scegliamo come base di generatori

$$T^a = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{T^1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}_{T^2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{T^3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{T^4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{T^5}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{T^6}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{T^7}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T^8} \Big\}$$

- $\mathcal{H}$ è data da matrici diagonali traceless

$$\mathcal{H} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \underline{r=2}$$

- Troviamo le matrici $ad(T^1)$:

$$[T^1, T^1] = 0$$

$$[T^1, T^2] = 0$$

$$[T^1, T^3] = \left[\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 2T^3$$

$$[T^1, T^4] = -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = -2T^4$$

$$[T^1, T^5] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -T^5$$

$$[T^1, T^6] = T^6$$

$$[T^1, T^7] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = T^7$$

$$[T^1, T^8] = -T^8$$

$$\Rightarrow ad(T^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: - è traceless
- è matrice in rep. Adj.

Alla stessa maniera possiamo calcolare

$$ad(T^2) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-2&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$$

- Vediamo che sono già in forma diagonale, cioè $T^3, \dots, T^8$ sono autovettori di $[T^1, \cdot]$ e $[T^2, \cdot]$

$$(\alpha^1, \alpha^2) = \underset{\alpha_1}{(2,-1)}, \underset{-\alpha_1}{(-2,1)}, \underset{\alpha_2}{(-1,2)}, \underset{-\alpha_2}{(1,-2)}, \underset{\alpha_3}{(1,1)}, \underset{-\alpha_3}{(-1,-1)} \qquad \alpha^i = \alpha(T^i) \;\; i=1,2$$

$$E_\alpha \qquad E_{\alpha_1} \equiv T^3, \quad E_{-\alpha_1} \equiv T^4, \quad E_{\alpha_2} \equiv T^5, \quad E_{-\alpha_2} \equiv T^6, \quad E_{\alpha_3} \equiv T^7, \quad E_{-\alpha_3} \equiv T^8$$

$\rightsquigarrow$ ci sono 6 roots per sl_3. Inoltre $\dim L_\alpha = 1$.

- Possiamo calcolare il loro prodotto di Killing:

$$\gamma = \frac{\sum_\alpha |\alpha|^2}{2\gamma} = \frac{24}{4} = 6$$

$$k(T^1, T^1) = \frac{1}{2\gamma} \mathrm{Tr}\left(ad(T^1)^2\right) = \frac{1}{2\gamma}(4+4+1+1+1+1) = \frac{1}{2\gamma} \cdot 12 = \frac{6}{\gamma}$$

$$k(T^2, T^2) = \frac{1}{2\gamma} \cdot 12 = \frac{6}{\gamma}$$

$$k(T^1, T^2) = \frac{1}{2\gamma} \mathrm{Tr}\left(ad(T^1)\, ad(T^2)\right) = \frac{1}{2\gamma}\left(\overbrace{-2-2-2-2}^{-6}+1+1\right) = -\frac{3}{\gamma}$$

Vediamo che la matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ è NON-degenere!

Possiamo diagonalizzare questa forma quadratica:

- $H^1 = \sqrt{\frac{\gamma}{6}}\, T^1 \qquad H^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{18}}\,(T^1 + 2T^2)$ ← Normalizzo T^1 e prendo un secondo vett. $\perp$ (secondo k) a T^1.

• Verifichiamo che H^1 e H^2 sono t.c. $k(H^i,H^j)=\delta^{ij}$

$k(H^1,H^1)=\frac{\gamma}{6}k(T^1,T^1)=1$

$k(H^2,H^2)=\frac{\gamma}{18}\left(k(T^1,T^1)+4k(T^2,T^2)+4k(T^1,T^2)\right)=\frac{\gamma}{18}\left(\frac{6}{\gamma}+\frac{24}{\gamma}-\frac{12}{\gamma}\right)=1$

$k(H^1,H^2)=\frac{\gamma}{6\sqrt{3}}\left(k(T^1,T^1)+2k(T^1,T^2)\right)=\frac{\gamma}{6\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\gamma}-\frac{2\cdot 3}{\gamma}\right)=0$!

• Fissiamo $\gamma=3$ (in qto modo ci vengono roots con $|\alpha|^2=2$).

$$H^1=\frac{1}{\sqrt{2}}T^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\qquad H^2=\frac{1}{\sqrt{6}}(T^1+2T^2)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$$

• Le roots sono ora date (in qta base $(\alpha^1,\alpha^2)=(\alpha(H^1),\alpha(H^2))$) da

$$\begin{array}{ccccccc} & \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_3\\ (\alpha^1,\alpha^2)= & (\sqrt{2},0), & (-\sqrt{2},0), & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right), & \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right), & \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right), & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\\ & T^3 & T^4 & T^5 & T^6 & T^7 & T^8 \end{array}$$

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$

• Usiamo H^1 e H^2 come base da ora in poi. $\qquad \alpha^i=\alpha(H_i)$

In particolare: $ad(H^1)=\begin{pmatrix}0&&&&&&&\\&0&&&&&&\\&&\sqrt{2}&&&&&\\&&&-\sqrt{2}&&&&\\&&&&-1/\sqrt{2}&&&\\&&&&&1/\sqrt{2}&&\\&&&&&&1/\sqrt{2}&\\&&&&&&&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $ad(H^2)=\begin{pmatrix}0&&&&&&&\\&0&&&&&&\\&&0&&&&&\\&&&0&&&&\\&&&&\sqrt{3/2}&&&\\&&&&&-\sqrt{3/2}&&\\&&&&&&\sqrt{3/2}&\\&&&&&&&-\sqrt{3/2}\end{pmatrix}$

• Vediamo ora $[L_\alpha,L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$.

Per es. $\underset{(\sqrt{2},0)}{[T^3},\ \underset{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{T^5]}=\left[\begin{pmatrix}0&1&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&&\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\underset{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{T^7}$ $\qquad [E_{\alpha_1},E_{\alpha_2}]=E_{\alpha_3}$

• Quali sono gli h_α? $\quad h_\alpha$ def. da $k(h,h_\alpha)=\alpha(h)$ $\rightsquigarrow$ $h_\alpha=\alpha^i H^i$

$h_{\alpha_1}=\sqrt{2}H^1+0\cdot H^2=\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}=T^1$

$h_{\alpha_2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}H^1+\sqrt{\frac{3}{2}}H^2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}=T^2$

$k(h_{\alpha_1},h_{\alpha_1})=k(T^1,T^1)=2\leftrightarrow \alpha(h_{\alpha_1})=\alpha_1(\sqrt{2}H^1)=2$

• Verifichiamo $[a,b] = k(a,b)\,h_\alpha$ con $a \in L_{\alpha_1}$ $b \in L_{-\alpha_1}$

$$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] = [T^3, T^4] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = h_{\alpha_1}$$

$k(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}) = ?$

Calcoliamo $ad(E_{\alpha_1})$ e $ad(E_{-\alpha_1})$

$[E_{\alpha_1}, H^1] = -\sqrt{2}\, E_{\alpha_1}$

$[E_{\alpha_1}, H^2] = 0$

$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_1}] = 0$

$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] = \sqrt{2} H^1$

$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = E_{\alpha_3}$

$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_2}] = 0$

$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_3}] = 0$

$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_3}] = -E_{-\alpha_2}$

$[E_{-\alpha_1}, H^1] = \sqrt{2}\, E_{-\alpha_1}$

$[E_{-\alpha_1}, H^2] = 0$

$[E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_1}] = -\sqrt{2} H^1$

$[E_{-\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] = 0$

$[E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = 0$

$[E_{-\alpha_1}, E_{-\alpha_2}] = -E_{-\alpha_3}$

$[E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_3}] = E_{\alpha_2}$

$[E_{-\alpha_1}, E_{-\alpha_3}] = 0$

$$ad(E_{\alpha_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ad(E_{-\alpha_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}) = \frac{1}{6}\, tr\left(ad(E_{\alpha_1})\, ad(E_{-\alpha_1})\right) = \frac{1}{6}\left(2 + 0 + 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0\right) = 1 \ (V)$$

- $E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha = \dfrac{h_\alpha}{k(h_\alpha, h_\alpha)}$ soddisfano $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = 2H_\alpha$, $[H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm E_{\pm\alpha}$
algebra $sl(2,\mathbb{C})$

Es:
$$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] = h_{\alpha_1} = 2\frac{h_{\alpha_1}}{k(h_\alpha, h_2)} = 2H_\alpha$$
$$[H_\alpha, E_\alpha] = \frac{1}{2}[h_\alpha, E_\alpha] = \frac{1}{2}\alpha(h_\alpha)E_\alpha = E_\alpha .$$

- $(\alpha_1, \alpha_2) \equiv k(h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}) = k(\sqrt{2}H^1, -\frac{1}{\sqrt{2}}H^1 + \sqrt{\frac{3}{2}}H^2) = -1$
$= \alpha_1(h_{\alpha_2}) = \alpha_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}H^1 + \sqrt{\frac{3}{2}}H^2) = -1$
$= (\sqrt{2}, 0)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = -1$

In particolare $\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle \equiv \dfrac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = -\dfrac{2}{2} = -1$

- Prendiamo $sl_{\alpha_1}(2,\mathbb{C})$.
  - Highest weight states sono $a \in \mathcal{G}$ t.c. $[E_{\alpha_1}, a] = 0$
    Essi sono autovett. di $\mathcal{H}$.
  - Nel nostro caso, essi sono $E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_2}, E_{\alpha_3}, H^2$
    Vediamo loro autoval per $H_{\alpha_1} = h_{\alpha_1}/2$

$$[H_{\alpha_1}, E_{\alpha_1}] = 1\cdot E_{\alpha_1} \qquad \text{(tripletto)}$$
$$[H_{\alpha_1}, E_{-\alpha_2}] = -\alpha_2\left(\frac{h_{\alpha_1}}{2}\right)E_{-\alpha_2} = -\frac{1}{2}\alpha_2(\sqrt{2}H^1)E_{-\alpha_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)E_{-\alpha_2} = \frac{1}{2}E_{-\alpha_2}$$
$$[H_{\alpha_1}, E_{\alpha_3}] = \frac{1}{2}\alpha_3(h_{\alpha_1})E_{\alpha_3} = \frac{1}{2}\alpha_3(\sqrt{2}H^1)E_{\alpha_3} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)E_{\alpha_3} = \frac{1}{2}E_{\alpha_3}$$
(doppietti)
$$[H_{\alpha_1}, H^1 - \sqrt{3}H^2] = 0 \qquad \text{(singoletto)}$$

- Applichiamo $E_{-\alpha_1}$ agli highest weights:

$[E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_1}]$ ... $\qquad E_{\alpha_1}, H_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}$

$[E_{-\alpha_1}, E_{-\alpha_2}] = -E_{-\alpha_3} \qquad [E_{-\alpha_1}, E_{-\alpha_3}] = 0 \qquad E_{-\alpha_2}, -E_{-\alpha_3}$

$[E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_3}] = E_{\alpha_2} \qquad [E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = 0 \qquad E_{\alpha_3}, E_{\alpha_2}$

Vediamo che abbiamo scomposto la rep. adj di $sl(3,\mathbb{C})$ somma diretta di irrep di $sl(2,\mathbb{C})$

$$\underline{8} = \underline{1} \oplus \underline{3} \oplus \underline{2} \oplus \underline{2}$$

$$\langle H^2 \rangle \oplus \langle E_{\alpha_1}, H_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1} \rangle \oplus \langle E_{-\alpha_2}, E_{-\alpha_3} \rangle \oplus \langle E_{\alpha_3}, E_{\alpha_2} \rangle.$$

- Verifichiamo che $K(h,h') = \frac{1}{2\gamma} \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\alpha(h')$

$$k(aH^1 + bH^2, a'H^1 + b'H^2) = aa' + bb'$$

$$\frac{1}{2\gamma} \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(aH^1 + bH^2)\alpha(a'H^1 + b'H^2) = \frac{1}{6} 2 \left(\alpha_1(h)\alpha_1(h') + \alpha_2(h)\alpha_2(h') + \alpha_3(h)\alpha_3(h') \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sqrt{2}a\sqrt{2}a' + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}a + \sqrt{\frac{3}{2}}b\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}a' + \sqrt{\frac{3}{2}}b'\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}a + \sqrt{\frac{3}{2}}b\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a + \sqrt{\frac{3}{2}}b\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{3}(2aa' + aa' + bb') = aa' + bb'$$

- Le roots generano $\mathcal{H}^*$, infatti tra i vett. (α_i^1, α_i^2) ce ne sono due $(r=2)$ di indip.

SUMMARY

Cartan subalgebra $\mathcal{H}$: maximal commuting subalgebra whose element are all semisimple (diagon.)

Roots :

- All $h \in \mathcal{H}$ can be simultan. diagonalised
- A ROOT is an $\alpha \in \mathcal{H}^*$ s.t. $\exists E_\alpha \in \mathcal{H}$ with $[h, E_\alpha] = \alpha(h) \cdot E_\alpha \quad \forall h \in \mathcal{H}$. $\qquad \alpha \in \Delta$
- The set of all roots: Δ.
- L_α eigenspace of root α, with $\dim L_\alpha = 1$.
- $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$ if $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$.
- If $\alpha \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta$.
- The roots generate $\mathcal{H}^*$.

Root space decomposition :

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} L_\alpha$$

Killing form and h_α:

- $k|_{\mathcal{H}}$ is non-degenerate
- Isomorphism : $\mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}$
  $\alpha \longmapsto h_\alpha$ s.t. $k(h_\alpha, h) = \alpha(h)$ $\forall h \in \mathcal{H}$
- $\exists$ o.n. basis $H^1, \dots, H^r$ s.t. $k(H^i, H^j) = \delta^{ij}$
- $h_\alpha = \alpha^i H^i$
- $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = \mathrm{Span}(h_\alpha)$, in partic. $[a, b] = k(a,b)\, h_\alpha$.
- $(\alpha, \beta) \equiv k(h_\alpha, h_\beta) = \beta(h_\alpha) = \alpha(h_\beta) = \alpha(\beta^i H^i) =$
  $= \sum_i \beta^i \alpha^i \rightsquigarrow (\alpha, \alpha) = |\alpha|^2 \equiv \sum_i \alpha^i \alpha^i$

- $k(h, h') = \frac{1}{2\gamma} \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\alpha(h')$

$\Rightarrow r = \sum_{i=1}^{r} k(H^i, H^i) = \frac{1}{2\gamma} \sum_\alpha |\alpha|^2 \rightsquigarrow$ we can fix γ by choosing normalisation of α's.

$sl_\alpha(2,\mathbb{C})$:

- $\alpha \in \Delta \longrightarrow sl_\alpha(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Span}(E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha)$
  with $[H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm E_{\pm\alpha}$ $\quad [E_{+\alpha}, E_{-\alpha}] = 2H_\alpha$

- $H_\alpha = \dfrac{h_\alpha}{k(h_\alpha, h_\alpha)}$ $\qquad k(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \dfrac{2}{k(h_\alpha, h_\alpha)}$

- $2\beta(H_\alpha) = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$

- If $[E_\alpha, E_\beta] = 0$, E_β is highest vector ;
  acting with $E_{-\alpha}$ one construct a rep of $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$
  of dimension $2j+1$ with j s.t. $ad(H_\alpha)E_\beta = jE_\beta$
  $\Rightarrow j = \beta(H_\alpha)$; $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \Rightarrow 2\beta(H_\alpha) \in \mathbb{N}$

- In general $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Commutation relations in Cartan-Weyl BASIS :

$$\boxed{\begin{aligned}
&[H^i, H^j] = 0 \\
&[H^i, E_\alpha] = \alpha^i E_\alpha \\
&[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta}\, E_{\alpha+\beta} & \text{se } \alpha+\beta \in \Delta \\ 2\dfrac{\alpha\cdot H}{|\alpha|^2} = 2H_\alpha & \text{se } \alpha = -\beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}}$$