Determinante

Def: sia $A \in M_n(K)$, definiamo il **determinante** di A in maniera ricorsiva nel modo seguente:

- se $n = 1$, ovvero $A = (a_{11})$, definiamo $\det A := a_{11}$
- se $n > 1$, definiamo:

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \, a_{i1} \cdot \det(A_{i1})$$

Oss: verifichiamo che le due definizioni di determinante per matrici 2×2 coincidono:

- da una parte $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- dall'altra $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$

$$= (-1)^2 \cdot a_{11} \cdot \det(A_{11}) + (-1)^3 \cdot a_{21} \cdot \det(A_{21})$$

$$= a_{11} \cdot \det((a_{22})) - a_{21} \cdot \det((a_{12}))$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

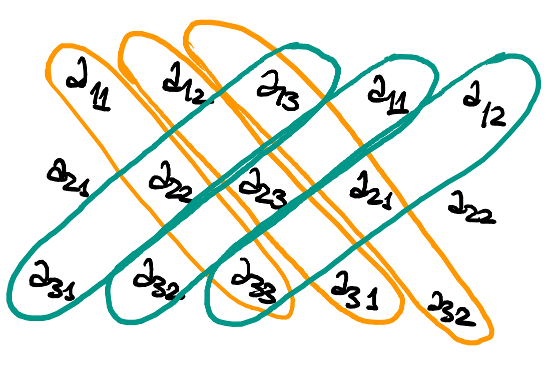
$$= -2 - 0 + 2(-2) = -6$$

Teorema: sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \text{ è invertibile} \iff \det(A) \neq 0$$

Per le matrici 3×3 (e **solo** per esse) vale la **formula di Sarrus**

se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$



$$\det(A) = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}} + \underbrace{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}} + \underbrace{a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}$$
$$- \underbrace{a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}} - \underbrace{a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}} - \underbrace{a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}}$$

Prop: il determinante gode delle seguenti proprietà:

D1. (multilinearità)

sia $A \in M_n(K)$ e supponiamo $A_{(i)} = R_1 + R_2$ (l'i-esima riga è somma di due righe) per qualche vettore riga R_1 e R_2

$$\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 + R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (\leftarrow (i)) = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\left(\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

inoltre se $A_{(i)} = c \cdot R$ per qualche $c \in K$ e qualche vettore riga R, allora

$$\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ c \cdot R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\left(\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

analoghe proprietà valgono se al posto delle righe consideriamo le colonne.

D2 (alternanza o antisimmetria)

se scambiamo di posto due righe o due colonne, il determinante cambia di segno, ovvero

$$\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

quindi se vi sono k scambi di righe o colonne il determinante va moltiplicato per $(-1)^k$

D3. (normalizzazione)

$$\det(\mathbb{1}_n) = 1.$$

Teorema: (teorema di caratterizzazione del determinante)

il determinante è l'unica funzione $M_n(K) \longrightarrow K$ che soddisfi le proprietà D1, D2, D3.

Esempio:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \overset{D1}{=} 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{D1}{=}$$

$$= 4 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 4(1 \cdot (-2) - 0 + 3 \cdot 0)$$

$$= -8$$

Cor: i. (se $\operatorname{char} K \neq 2$) se A ha due righe uguali, allora per D2 abbiamo che, scambiando tali righe

$$\det(A) = -\det(A)$$
$$\Updownarrow$$
$$2 \cdot \det(A) = 0$$
$$\Updownarrow \ \operatorname{char} K \neq 2$$
$$\det(A) = 0$$

analogamente per le colonne.

ii. se A ha una riga nulla, allora per D1 vale $\det(A) = 0$ (perché posso scrivere tale riga come zero per se stessa)

analogamente per le colonne.