__Cor.__ i. se $\tilde{A}$ è ottenuta da $A$ con una operazione OE1, allora

$$\det(\tilde{A}) = -\det(A)$$

ii. se $\tilde{A}$ è ottenuta da $A$ con una operazione elementare OE2, allora $\det(\tilde{A}) = c \cdot \det(A)$ dove $c \in K$ è lo scalare utilizzato nell'operazione.

iii. se $\tilde{A}$ è ottenuta da $A$ con una operazione elementare OE3, allora $\det(\tilde{A}) = \det(A)$; infatti

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + c \cdot A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \leftarrow (i)$$

$$\det(\tilde{A}) = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (i) \overset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (i) + c \cdot \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (i)$$

$$= \det(A) + c \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (i)}_{\substack{=0 \\ (\text{se } \operatorname{char} K \neq 2)}}$$

la riga $A_{(j)}$ compare quindi sia in posizione $(i)$ che in posizione $(j)$ pertanto questa matrice ha due righe uguali

$$= \det(A)$$

__Cor.__ se $A \in M_n(K)$ e $\tilde{A}$ è la matrice a scala ottenuta applicando ad $A$ l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss, allora

$$\det(\tilde{A}) = \lambda \cdot \det(A) \quad \text{per un certo } \lambda \in K \setminus \{0\}$$

dunque

$$\det(A) = 0 \iff \det(\tilde{A}) = 0.$$

inoltre se nell'algoritmo di gradinizzazione di Gauss non effettuiamo mai la normalizzazione dei pivot a 1, allora $\det(\tilde{A}) = (-1)^k \cdot \det(A)$ dove $k$ è il numero di scambi di righe effettuate durante l'algoritmo di Gauss

__Prop.__: se $A \in M_n(K)$ è una matrice triangolare superiore ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ovvero } a_{ij} = 0 \text{ se } i > j$$

allora $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Dim: dimostriamo questo risultato per induzione su $n$

$\boxed{n=1}$ in questo caso $A = (a_{11})$ e per definizione $\det(A) = a_{11}$ dunque vale la tesi

$\boxed{\text{passo induttivo}}$ supponiamo che la tesi valga per $n-1$ e dimostriamo che essa vale per $n$; possiamo supporre che $n > 1$; vale che

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \det(A_{11}) - 0 \cdot \det(A_{21}) + 0 \cdot \det(A_{31}) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} \cdot 0 \cdot \det(A_{n1})$$

$$= a_{11} \cdot \det(A_{11})$$

ora

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pertanto $A_{11}$ è una matrice $(n-1) \times (n-1)$ triangolare superiore

dunque per $A_{11}$ vale l'ipotesi induttiva, e quindi

$$\det(A_{11}) = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

pertanto $\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ □

__Cor.__ se $\tilde{A}$ è una matrice quadrata e a scala, allora

$$\det(\tilde{A}) \neq 0 \iff \tilde{A} \text{ non ha righe nulle}$$

Dim: dato che $\tilde{A}$ è a scala, essa è una matrice triangolare superiore e quindi il suo determinante è il prodotto degli elementi della sua diagonale

"$\Rightarrow$" se $\det(\tilde{A}) \neq 0$, allora tutti gli elementi della diagonale di $\tilde{A}$ sono non nulli, e quindi nessuna riga di $\tilde{A}$ è tutta nulla

"$\Leftarrow$" se $\tilde{A}$ non ha righe nulle, allora tutti i suoi gradini sono di larghezza 1 essendo $\tilde{A}$ a scala e quindi gli elementi sulla sua diagonale sono esattamente i suoi pivot, che sono tutti non nulli, e pertanto il loro prodotto è non nullo, ovvero vale che $\det(\tilde{A}) \neq 0$. □

__Teorema.__ sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \text{ è invertibile} \iff rg(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$

equivalentemente

$$A \text{ non è invertibile} \iff rg(A) < n \iff \det(A) = 0$$

Questo teorema segue e riassume i risultati enunciati/dimostrati recentemente. Vediamo ora che il determinante si può sviluppare lungo una qualsiasi riga o colonna della matrice. Queste formule si dicono __sviluppi__ di __Laplace__ del determinante.

__Teorema__: (sviluppo rispetto alla $k$-esima colonna)

sia $A \in M_n(K)$ e sia $k \in \{1, \ldots, n\}$, allora

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{ik})$$

__Teorema__: (sviluppo rispetto alla $l$-esima riga)

sia $A \in M_n(K)$ e sia $l \in \{1, \ldots, n\}$, allora

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \cdot a_{lj} \cdot \det(A_{lj})$$