Cor. sia $A \in M_n(K)$, allora $\det(A) = \det({}^tA)$

Dim. $\det {}^tA$ = sviluppo secondo la prima riga di ${}^tA$

= sviluppo secondo la prima colonna di A

$= \det A$

Dal. per comprendere che segni abbiamo elementi nuovi sviluppo al laplace del determinante, notiamo che l'segno del $(-1)^{i+j}$ è:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Teorema: (Teorema di Binet)

sia $A, B \in M_n(K)$, allora

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

prodotto di matrici — prodotto di numeri

Dim. non esiste una formula analoga per il determinante del sommare.

Cor. sia $A \in M_n(K)$ invertibile (dunque $\det A \neq 0$), allora

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \det(A)^{-1}$$

Dim. per definizione $A \cdot A^{-1} = I_n$ applicando per il teorema di Binet

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I_n) \cdot (\det(A^{-1}))$$

dunque

$$\det(A) \cdot (\det(A^{-1})) = \det(I_n) = 1$$

quindi $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Considerazione quanto enorme con un teorema che ognuno l'hanno del una matrice.

Def. sia $A \in M_n(K)$ e siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il **cofattore** j-esimo di A è lo scalare (uno l'elemento di K)

$$(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

dove A_{ij} è il minore j-esimo di A; abbiamo la notazione che cofattore di A con la matrice non i j al elementi j-esimo e il cofattore j-esimo di A; chiamiamo che matrice con $\det(A)$

Esempio: sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

cofattore di posto $(1,1)$: $(-1)^{1+1} \cdot \det(A_{11}) = 6$

" " " $(1,2)$: $(-1)^{1+2} \cdot \det(A_{12}) = -3$

" " " $(2,1)$: $(-1)^{2+1} \cdot \det(A_{21}) = -5$

" " " $(2,2)$: $(-1)^{2+2} \cdot \det(A_{22}) = 2$

Prop. sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \cdot {}^t\mathrm{cof}(A) = (\det A) \cdot I_n = \begin{pmatrix} \det & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \det \end{pmatrix}$$

in particolare se A è invertibile, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\mathrm{cof}(A)$$

Applicazioni lineari

Def. siano V e V' due spazi vettoriali su K; un'applicazione

$$f: V \longrightarrow V'$$

si dice un'**applicazione lineare** se:

A1. (additività)

$\forall v_1, v_2 \in V$, che

$$f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\text{somma in } V}) = \underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{\text{somma in } V'}$$

"l'immagine della somma è la somma delle immagini"

A2. (omogeneità)

$\forall v \in V$, $\forall \lambda \in K$, che

$$f(\underbrace{\lambda \cdot v}_{\text{moltiplicazione di uno scalare di K per un vettore di V}}) = \underbrace{\lambda \cdot f(v)}_{\text{moltiplicazione di uno scalare di K per un vettore di V'}}$$

"l'immagine del una moltiplicazione per uno scalare è la moltiplicazione per uno scalare dell'immagine"

Esempio: consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2$$

da che

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

quindi f è additiva; analogamente si dimostra che f è omogenea, e quindi f è lineare.

Esercizio: trovare un esempio del non lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che non sia lineare.

Def. sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare, dove

$$f(0) = 0$$

dove che 0 è l'elemento del V e l'elemento del V'

Dim. che che

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

ora aggiungiamo $-f(0)$ a entrambi i membri e otteniamo

$$\underbrace{f(0) - f(0)}_{0} = f(0) + \underbrace{f(0) - f(0)}_{0}$$

$$\Rightarrow 0 = f(0)$$

Def. sia $A \in M_{m,n}(K)$, allora di definiamo una funzione

$$L_A: K^n \longrightarrow K^m$$

$$v \longmapsto Av$$

Prop. $\forall A \in M_{m,n}(K)$, la funzione L_A è un'applicazione lineare

Dim. siano $v_1, v_2 \in K^n$, allora

$$L_A(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2)$$

$$= A \cdot v_1 + A \cdot v_2$$

$$= L_A(v_1) + L_A(v_2)$$

quindi L_A è additiva; analogamente si dimostra che L_A è omogenea, quindi L_A è lineare.

Esempio: (rotazione del piano di angolo α in senso antiorario)

su $\mathbb{R}^2$ si definisce la rotazione

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare $L_{R_\alpha}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è la rotazione di angolo α in senso antiorario intorno all'origine

$$L_{R_\alpha}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$L_{R_\alpha}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Def. (applicazione lineare che "spanda la coordinata")

sia V uno spazio vettoriale su K ed elementi finiti v di $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V; definiamo la funzione che spanda la coordinata rispetto a $\mathcal{B}$ nel modo seguente; esso è la funzione

$$\Phi_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow K^n$$

che associa nel modo seguente: se $v \in V$, dove v si può scrivere a modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

il vettore $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ è il vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$; definiamo $\Phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$; si può dimostrare che $\Phi_{\mathcal{B}}$ è lineare e inoltre è biettiva (quindi invertibile)

si dice quindi che $\Phi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio: dimostrare che se $f: V \to V'$ è un'applicazione lineare biettiva allora $f^{-1}: V' \to V$ è anch'essa lineare.

Def. sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare; definiamo il **nucleo** del f come l'insieme:

$$\ker f := \{v \in V : f(v) = 0\}$$

quindi $\ker f \subseteq V$, definiamo l'**immagine** del f come l'insieme

$$\mathrm{im} f := \{v' \in V' : \text{esiste } v \in V \text{ tale che } f(v) = v'\}$$

quindi $\mathrm{im} f \subseteq V'$

Prop. sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare; dove $\ker f$ è un sottospazio vettoriale del V e $\mathrm{im} f$ è un sottospazio vettoriale del V'.

Dim. cominciamo considerando $\ker f$:

i) supponiamo che esiste due v, v' in applicazione lineare, $f(v) = 0$ e $f(v') = 0$ $\in \ker f$.

ii) siano $v, v' \in \ker f$; vogliamo mostrare che $v + v' \in \ker f$, per ipotesi

$$f(v) = 0 \quad \text{e} \quad f(v') = 0$$

chiamiamo che $v + v' \in \ker f$ equivalente a chiamiamo che $f(v + v') = 0$, infatti che

$$f(v + v') \overset{A1}{=} f(v) + f(v') = 0 + 0 = 0$$

quindi $v + v' \in \ker f$

iii) sia $v \in \ker f$ e sia $\lambda \in K$; vogliamo mostrare che $\lambda \cdot v \in \ker f$; per ipotesi

$$f(v) = 0$$

mostrare che $\lambda \cdot v \in \ker f$ equivalente a mostrare che $f(\lambda \cdot v) = 0$; infatti che

$$f(\lambda \cdot v) \overset{A2}{=} \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot 0 = 0$$

quindi $\lambda \cdot v \in \ker f$

Abbiamo mostrato che $\ker f$ è un sottospazio vettoriale del V.

Consideriamo ora $\mathrm{im} f$:

i) supponiamo che esiste due v, v' in applicazione lineare, $f(v) = 0$, dunque anche v, v' $\in \mathrm{im} f$.

ii) siano $v, v' \in \mathrm{im} f$; vogliamo mostrare che $v + v' \in \mathrm{im} f$, per ipotesi esiste $v \in V$ tale che $f(v) = v'$ e esiste $v_2 \in V$ tale che $f(v_2) = v'$

mostrare che $v + v' \in \mathrm{im} f$ equivale mostrare che esiste $v \in V$ tale che $f(v) = v' + v'$; mostriamo $v = v_1 + v_2$ e notiamo che

$$f(v_1 + v_2) \overset{A1}{=} f(v_1) + f(v_2) = v' + v'$$

quindi $v_1 + v_2 \in \mathrm{im} f$

iii) sia $v \in \mathrm{im} f$ e sia $\lambda \in K$; vogliamo mostrare che $\lambda \cdot v \in \mathrm{im} f$; per ipotesi

esiste $v \in V$ tale che $f(v) = v'$

mostrare che $\lambda \cdot v \in \mathrm{im} f$ equivale a mostrare che $\lambda \cdot v'$ è immagine attraverso f, cioè un elemento del V' corrispondente $\lambda \cdot v$; e notiamo che

$$f(\lambda \cdot v) \overset{A2}{=} \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot v'$$

quindi $\lambda \cdot v \in \mathrm{im} f$

Abbiamo mostrato che $\mathrm{im} f$ è un sottospazio vettoriale del V'