Lezione 24 - 10/11/2025

Serie

$(a_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$) termine generale

$(s_n)_n$ $\quad (s_0 = a_0, \quad s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n)$

successione delle ridotte o delle somme parziali

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ indica la coppia $\left((a_n)_n , (s_n)_n \right)$

Scopo principale: data $(a_n)_n$ capire cosa fa la $(s_n)_n$

se $\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$ (o a $\mathbb{C}$)

↑ somma della serie

e $\sum_n a_n$ si dice <u>convergente</u>

se $\lim_n s_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ si dice <u>divergente</u> (se $(a_n)_n$ è in $\mathbb{R}$)

se $\lim_n s_n$ non esiste si dice <u>indeterminata</u>

carattere della serie.

esempi importanti

serie geometrica di ragione ρ

($\rho \in \mathbb{R}$) ragione

$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^n + \dots$

- conv. se $|\rho| < 1$
- se $\rho \geq 1$ divergente
- se $\rho \leq -1$ indeterminata

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ serie armonica — divergente

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n 1 + \dots$ indeterminata

condizione necessaria per la convergenza

Teo. se $\sum_n a_n$ è convergente allora $\lim_n a_n = 0$

(non è sufficiente che $\lim_n a_n = 0$ per avere la conv. ma è solo <u>necessario</u>)

Teo (condizione di Cauchy per le serie)

$\sum_n a_n$ è convergente se e solo se

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, k, \quad n > \bar{n} \wedge k > 1 \Rightarrow |a_n + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$

~o~

def. sia $\sum_n a_n$ una serie

consideriamo, per $k \in \mathbb{N}$, $b_n = a_{n+k}$

la serie $\sum_n b_n \left(= \sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \right)$

la chiamiamo "resto k-esimo di $\sum_n a_n$"

Teo. ogni resto ha lo stesso carattere della serie di partenza.

dim. indichiamo con s_n^a le ridotte di $\sum_n a_n$

s_n^b " ridotte del resto k-esimo

$s_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$s_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n = a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+n}$

Criteri di convergenza.

1) Criterio del confronto.

Teorema Siano $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ due serie a t.n.n.

Supponiamo che $\forall n$, $(0 \leq) a_n \leq b_n$

diremo $\sum_n a_n$ è minorante di $\sum_n b_n$

ovvero

$\sum_n b_n$ è maggiorante di $\sum_n a_n$

Allora

- se $\sum_n a_n$ è div. allora $\sum_n b_n$ divergente
- se $\sum_n b_n$ è conv. allora $\sum_n a_n$ conv.

dim. $a_n \leq b_n \quad \forall n$

$\Downarrow$

$$\underbrace{a_0+a_1+\dots a_n}_{S_n^a} \leq \underbrace{b_0+b_1+\dots+b_n}_{S_n^b} \Rightarrow S_n^a \leq S_n^b$$

supponiamo che $\sum_n a_n$ sia div.

significa $\lim_n S_n^a = +\infty$

$\Downarrow$

$\lim_n S_n^b = +\infty$

$\Rightarrow \sum_n b_n$ è div.

Adesso supponiamo che $\sum_n b_n$ sia convergente

allora $S_n^b \leq \sup_n S_n^b = S^b$ somma della $\sum_n b_n$

allora $S_n^a \leq S_n^b \leq S^b$

allora $S_n^a \leq S^b$ ma allora $\sup S_n^a < +\infty$

ma allora $\lim_n S_n^a$ è finito

la serie è conv.

CVD

$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$S_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n = a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+n}$

$$S_n^b = S_{n+k}^a - S_{k-1}^a = \underbrace{(a_0 + \dots + a_{n+k})}_{S^a_{n+k}} - \underbrace{(a_0 + \dots + a_{k-1})}_{S^a_{k-1}}$$

non dipende più da n

(S_n^a) e (S_n^b) differiscono per una costante sommata quindi hanno lo stesso comportamento

CVD.

oss. se ho $\sum_n a_n$ posso considerare

$\sum_n (\lambda a_n)$ ← questa avrà lo stesso carattere di $\sum_n a_n$

$(a_n)_n$ $\quad (\lambda a_n)_n$

$(S_n^a)_n$ $\quad (\tilde{S}_n)_n$ $\quad \tilde{S}_n = \lambda a_n$

$S_n^a = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ → S

$\lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n = \lambda \cdot S_n^a$ → λS

Esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente con somma 1

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ convergente con somma 2

stessa cosa se ho 2 serie $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$

e considero $\sum_n (a_n + b_n)$

• SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

def. considero $\sum_n a_n$ con $(a_n)_n$ succ. in $\mathbb{R}$

se $\forall n$, $a_n \geq 0$ (>0) dico che $\sum_n a$ è a termini non negativi (positivi)

PROPRIETÀ FONDAMENTALE

$(S_n)_n$ è crescente

Teorema (Aut-aut per le serie a termini n.n.)

una serie a termini non negativi o è convergente o è divergente a $+\infty$.

dim basta usare la prop. fondamentale e il teorema sul limite delle succ. monotone.

oss. l'aut-aut vale anche se la proprietà