

Esponenziali e Logaritmi

Fabio Vlacchi

MIGe Università di Trieste

10 novembre 2025

La funzione exp

$$x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n := \exp(x)$$

La funzione exp

$$x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n := \exp(x)$$

Se $|x| < n$

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq 1$$

da cui

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n};$$

La funzione exp

$$x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n := \exp(x)$$

Se $|x| < n$

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq 1$$

da cui

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n};$$

inoltre

$$\underbrace{1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{\text{Dis. Bernoulli}} \leq \underbrace{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1-x}}_{\text{Dis. Bernoulli}}.$$

La funzione exp

Risulta quindi, se $x > 0$,

$$\exp(0) = 1 < 1 + x \leq \exp(x);$$

La funzione exp

Risulta quindi, se $x > 0$,

$$\exp(0) = 1 < 1 + x \leq \exp(x);$$

se poi $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una qualunque successione infinitesima, ossia tale che $c_n \rightarrow 0$, allora per n sufficientemente grande si ha $|c_n| < n$ e quindi

$$1 + c_n \leq \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - c_n};$$

da cui, per il Teorema del Confronto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n = 1 = \exp(0).$$

La funzione exp

$$\begin{aligned}\frac{\left(1 + \frac{x_1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{x_2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x_1 + x_2}{n}\right)^n} &= \frac{\left(1 + \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \frac{x_1 \cdot x_2}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n}\right)^n} = \\ &= \left(1 + \frac{\frac{x_1 \cdot x_2}{n^2}}{\left(1 + \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n}\right)}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n\end{aligned}$$

$$\text{con } c_n = \frac{\frac{x_1 \cdot x_2}{n^2}}{\left(1 + \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n}\right)}$$

La funzione exp

Essendo $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione infinitesima, segue allora che

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{x_1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{x_2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x_1 + x_2}{n}\right)^n};$$

poiché

$$x_1 \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x_1}{n}\right)^n := \exp(x_1)$$

$$x_2 \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x_2}{n}\right)^n := \exp(x_2)$$

$$(x_1 + x_2) \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x_1 + x_2}{n}\right)^n := \exp(x_1 + x_2)$$

si ricava che

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2).$$

La funzione exp

Da questo segue che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x);$$

pertanto, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

- $\exp(x) > 0$

La funzione exp

Da questo segue che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x);$$

pertanto, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

- $\exp(x) > 0$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$

Inoltre, se $x_1 < x_2$ ossia se $0 < x_2 - x_1$ segue che

$$1 = \exp(0) < \exp(x_2 - x_1) = \exp(x_2) \cdot \exp(-x_1) = \exp(x_2) \cdot \frac{1}{\exp(x_1)}$$

ovvero

$$\exp(x_1) < \exp(x_2)$$

cioè la funzione $\exp$ è monotóna crescente, quindi iniettiva e dunque invertibile sull'immagine.

La funzione $\ln$

La funzione inversa della funzione $\exp$ si indica con il simbolo $\ln$.

La funzione $\ln$

La funzione inversa della funzione $\exp$ si indica con il simbolo $\ln$.

La funzione $\ln(x)$ è definita per $x > 0$ ed è anch'essa crescente.

Essendo $\ln(1) = 0$, i valori della funzione $\ln$ risultano positivi per $x > 1$ (negativi per $0 < x < 1$).

La funzione $\ln$

La funzione inversa della funzione $\exp$ si indica con il simbolo $\ln$.

La funzione $\ln(x)$ è definita per $x > 0$ ed è anch'essa crescente.

Essendo $\ln(1) = 0$, i valori della funzione $\ln$ risultano positivi per $x > 1$ (negativi per $0 < x < 1$).

Se $a > 0$ ($a \neq 1$) poniamo

$$a^x := \exp(\ln(a))^x = \exp(\ln(a)x).$$

La funzione $\ln$

La funzione inversa della funzione $\exp$ si indica con il simbolo $\ln$.

La funzione $\ln(x)$ è definita per $x > 0$ ed è anch'essa crescente.

Essendo $\ln(1) = 0$, i valori della funzione $\ln$ risultano positivi per $x > 1$ (negativi per $0 < x < 1$).

Se $a > 0$ ($a \neq 1$) poniamo

$$a^x := \exp(\ln(a))^x = \exp(\ln(a)x).$$

Si noti che $\ln(e) = 1$, pertanto

$$\exp(x) = e^x.$$

La funzione $\ln$

Da

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - x}$$

(per $|x| < n$) si ricava anche che

$$\frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u$$

ovvero

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

La funzione $\ln$

Da

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - x}$$

(per $|x| < n$) si ricava anche che

$$\frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u$$

ovvero

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Pertanto, se poi $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una qualunque successione infinitesima e tale che $1 + c_n > 0$, allora per n sufficientemente grande si ha $|c_n| < n$ e quindi, per il Teorema del Confronto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + c_n) = 0.$$

La **funzione esponenziale** è definita come:

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a > 0, a \neq 1$$

- a è detta la **base**;
- x è detto l'**esponente**.

Proprietà principali

- $a^0 = 1$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

La **funzione logaritmica** è la funzione inversa dell'esponenziale:

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

con $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

La **funzione logaritmica** è la funzione inversa dell'esponenziale:

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

con $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Se $a = e$ (numero di Nepero) si pone $\log_e = \ln$.

Proprietà dei logaritmi

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^r) = r \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

(cambio di base)

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Esponenziale	Logaritmo
---------------------	------------------

$(a > 0) \ y = a^x$	$y = \log_a(x)$
---------------------	-----------------

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Esponenziale	Logaritmo
--------------	-----------

$(a > 0) y = a^x$	$y = \log_a(x)$
-------------------	-----------------

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x > 0$$

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Esponenziale	Logaritmo
--------------	-----------

$(a > 0) y = a^x$	$y = \log_a(x)$
-------------------	-----------------

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$y \in \mathbb{R}$$

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Esponenziale	Logaritmo
--------------	-----------

$(a > 0) y = a^x$	$y = \log_a(x)$
-------------------	-----------------

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$y \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a(x)} = x \quad (x > 0) \quad \text{e} \quad \log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$