Lezione 25 - 11/11/2025

Serie a termini non negativi

- Aut-aut
- Criterio del confronto
- Criterio del confronto asintotico
- Criterio del rapporto e della radice

Teo (rapporto) sia $\sum_n a_n$ a termini positivi ($a_n > 0, \forall n$)

supponiamo $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

se $\ell < 1$ la serie è convergente

se $\ell > 1$ la serie è divergente

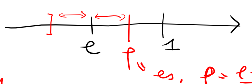
Se $\ell = 1$ non si può dire niente (in generale)

oss. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergente $\quad \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente, $\quad \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

dimostrazione (cenno)

supponiamo $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ con $\ell < 1$



es. $\rho = \frac{\ell+1}{2}$

in particolare $\exists \bar{n} : \forall n,$

$n \geq \bar{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$

allora

$\frac{a_{\bar{n}+1}}{a_{\bar{n}}} < \rho \Rightarrow a_{\bar{n}+1} < \rho a_{\bar{n}}$

$\frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < \rho \Rightarrow a_{\bar{n}+2} < \rho a_{\bar{n}+1} < \rho^2 a_{\bar{n}}$

$\frac{a_{\bar{n}+3}}{a_{\bar{n}+2}} < \rho \Rightarrow a_{\bar{n}+3} < \rho a_{\bar{n}+2} < \rho^2 a_{\bar{n}+1} < \rho^3 a_{\bar{n}}$

allora $a_{\bar{n}+k} < \rho^k a_{\bar{n}}$

la serie $\underbrace{\sum_k a_{\bar{n}+k}}_{\text{il resto } \bar{n}\text{-esimo di } \sum_n a_n}$ è maggiorata da $\underbrace{\sum_k a_{\bar{n}} \rho^k}$

costante

è convergente

è una costante × la serie geometrica di ragione $\rho < 1$ è convergente

esercizio.

Esempio $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

applico il criterio del rapporto

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$ quindi la serie è convergente

x è un parametro

es. fisso $x \geq 0$ considero $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

applico il criterio del rapporto $\lim_n \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}$

x è un parametro $\qquad$ converge

fisso $x \geq 0$

considero $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

applico il criterio del rapporto $\lim_n \dfrac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}$

$$\lim_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_n \frac{x}{n+1} = 0$$

è convergente per ogni $x \in [0, +\infty[$

Scopriremo che la somma di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ è e^x

Teorema (criterio della serie condensata)

sia $\sum_n a_n$ serie a termini positivi

supponiamo che $\forall n, \quad a_{n+1} \leq a_n$

allora: $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n}_{\text{serie di partenza}}$ è convergente se e solo se $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n a_{2^n})}_{\text{serie condensata di } \sum_n a_n}$ è convergente.

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \rightsquigarrow$ condensata: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$

$\sum_{n=1}^{+\infty} 1$

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \rightsquigarrow$ condensata $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha}$

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^n \cdot \frac{1}{2^{n\alpha}} = 2^n \cdot 2^{-n\alpha} = 2^{n-n\alpha}$$

$$= (2^{1-\alpha})^n$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^n \quad \nwarrow$ serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$

quindi convergente se $2^{1-\alpha} < 1$, divergente se $2^{1-\alpha} \geq 1$

$2^{1-\alpha} < 1 \iff 2^{1-\alpha} < 2^0 \iff 1 - \alpha < 0 \iff \alpha > 1$

la serie è conv. per $\alpha > 1$

$2^{1-\alpha} \geq 1 \iff 2^{1-\alpha} \geq 2^0 \iff 1 - \alpha \geq 0 \iff \alpha \leq 1$

conclusione $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente per $\alpha > 1$, divergente per $\alpha \leq 1$

0 $\quad$ divergente $\quad$ 1 $\quad$ convergente $\quad$ α $\quad$ $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$

dim. (cenno)

osserviamo: $a_1 \leq a_1$

$a_1 + a_2 + a_3 \leq a_1 + 2a_2$ (infatti $a_3 \leq a_2$)

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4$ (infatti $a_3 \leq a_2$, $a_5, a_6, a_7 \leq a_4$)

dim. (cenno)

osserviamo: $a_1 \leq a_1$

$a_1+a_2+a_3 \leq a_1+2a_2$ (infatti $a_3 \leq a_2$)

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 \leq a_1+2a_2+4a_4$

$a_1+\dots+a_{15} \leq a_1+2a_2+4a_4+8a_8$ (infatti $a_3 \leq a_2$, $a_5, a_6, a_7 \leq a_4$)

$$\underbrace{a_1+a_2+\dots+a_{2^n-1}}_{s_{2^n-1}} \leq \underbrace{a_1+2a_2+\dots+2^{n-1}a_{2^{n-1}}}_{\sigma_{n-1}}$$

ridotta della serie di partenza

ridotta della condensata

vero che $\sum_n 2^n a_{2^n}$ conv. $\Rightarrow \sum_n a_n$ conv.

con conto simile pure il viceversa.

Esercizi: studiare il carattere di

$$\sum_n \frac{1}{n+\sqrt{n}}, \quad \sum_n (\log(n+2)-\log n),$$

$$\sum_n \left(\frac{\pi}{2}-\arctan n^2\right), \quad \sum_n \frac{1}{n(\log n)^2}, \quad \sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

  - serie a termini positivi

$n < n+\sqrt{n} < 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

$\sum_n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\sum_n \frac{1}{n}$ è divergente

per confronto è divergente

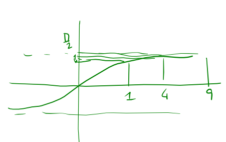
oppure $\lim_n \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$ $\quad \sum \frac{1}{n}$, $\sum_n \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ hanno lo stesso carattere

$\sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n+2)-\log n)$ (divergente)

- è termini positivi
- $\lim_n (\log(n+2)-\log n) = \lim_n \log\left(\frac{n+2}{n}\right)$

$= \lim_n \log\left(1+\frac{2}{n}\right) = 0$

$\frac{\log(1+f(x))}{f(x)} \to 1$ $\qquad \frac{\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2/n} \longrightarrow 1$



la serie $\sum_n \log\left(1+\frac{2}{n}\right)$ ha lo stesso carattere di $\sum_n \frac{2}{n}$

$2\cdot\sum_n \frac{1}{n}$ diverg.

$\sum_n \left(\frac{\pi}{2}-\arctan n^2\right)$

¿ è a termini positivi? sì

$\lim_n \left(\frac{\pi}{2}-\arctan n^2\right) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = ?$

$\downarrow +\infty \qquad \downarrow 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{+\infty}{x}\,\underset{0}{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)} = ? \; = 1$$

$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x = y$

$\frac{\pi}{2}-y = \operatorname{arctg} x$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = x$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}$$

$$= \lim_{y\to0^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cdot y = \lim_{y\to0^+} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\cdot y = \lim_{y\to0^+} \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\cdot y = 1$$

$x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right) \to 1$

$$\boxed{\lim_{n} n^2\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2\right) = 1}$$

quindi $\lim_{n} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2}{\frac{1}{n^2}} = 1$

la serie $\underbrace{\sum_n \left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2\right)}_{\text{è conv.}}$ ha lo stesso carattere di $\sum_n \frac{1}{n^2}$ conv

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\lg n)^2} \qquad \text{(sugg. usare la condensazione)}$$

$a_n = \frac{1}{n(\lg n)^2}$

$$2^n a_{2^n} = \cancel{2^n}\cdot\frac{1}{\cancel{2^n}(\lg 2^n)^2} = \frac{1}{(\lg(2^n))^2} = \frac{1}{(n\lg 2)^2} = \frac{1}{n^2\cdot(\lg 2)^2}$$

$(\lg(2^n))^2 = (n\lg 2)^2$

$$\sum_n \frac{1}{n^2(\lg 2)^2} = \frac{1}{(\lg 2)^2}\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}_{\text{conv.}}$$

conclusione $\sum_n \frac{1}{n(\lg n)^2}$ è convergente.

osservare

le serie maggioranti $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergenti

le serie minoranti $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha>1$ convergenti

1

divergenti $\sum\frac{1}{n}$ | $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha>1$ convergenti

$a_n > \frac{1}{n}$ divergente

$a_n < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ convergente

$$\frac{1}{n} > a_n > \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \qquad ¿\sum_n \frac{1}{n\lg n}?$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n(\lg n)^\alpha} > \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}$$

sugg. usare il criterio del rapporto.

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\dfrac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{\binom{2n}{n}}{3^n}}$$

$$= \lim_n \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$$

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}$$

$$= \lim_n \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\cancel{3^{n+1}}_{\,3}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\binom{2n}{n}}$$

$$= \lim_n \frac{1}{3} \cdot \frac{\overset{(2n+2)(2n+1)}{\cancel{(2n+2)!}}}{\underset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}\,\underset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$= \lim_n \frac{1}{3} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{(2n+2)}}(2n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+1)} = \lim_n \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{n+1}$$

$$= 4/3 > 1$$

La serie è divergente.