ROOT SEMPLICI

- Prendiamo una base $\rho_1, \dots, \rho_r$ di $\mathcal{H}^*$

- Ogni root può essere espansa nella base:
$$\alpha = \sum_{j=1}^{r} n_j \rho_j$$

- La root α si dice POSITIVA se il primo numero $\neq 0$ della sequenza $(n_1, \dots, n_r)$ è positivo.
Denotiamo con Δ_+ l'insieme delle root positive.
Analogamente $\Delta_- = \{-\alpha \mid \alpha \in \Delta_+\}$ è l'insieme delle root negative.

- Una root positiva che non può essere scritta come la somma di due root positive è chiamata SIMPLE ROOT α_i.
Ci sono esattamente r root semplici $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ che forniscono una base di $\mathcal{H}^*$ (dim. dopo).

Notiamo che:

- $\alpha_i - \alpha_j \notin \Delta$ se α_i e α_j sono semplici.

Dim. $\alpha_i = \alpha_j + (\alpha_i - \alpha_j)$ ma α_i è simple $\Rightarrow \alpha_i - \alpha_j \notin \Delta_+$;

$\alpha_j = \alpha_i + (\alpha_j - \alpha_i)$ ma α_j è simple $\Rightarrow \alpha_i - \alpha_j \notin \Delta_-$. //

- Ogni root positive è una somma di simple roots
  $\Rightarrow$ ogni root può essere scritta come $\sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i$
  con $n_i \geq 0 \; \forall i$ o $n_i \leq 0 \; \forall i$.

Dim. Ogni root positiva è una simple root o è una somma di due root positive; nell'ultimo caso possiamo fare la stessa affermazione per ognuno dei due addendi, e continuare finché non ci fermiamo su simple roots (bisogna fermarsi perché il n° delle roots è finito). //

Definiamo ora la MATRICE DI CARTAN A_{ij} come

$$A_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_j|^2} \in \mathbb{Z}$$

da $(*)$

- È una matrice con $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ e $A_{ii} = 2$.
- La disug. di Schwarz$^{(\circ)}$ $\Rightarrow$ $A_{ij} A_{ji} < 4$ per $i \neq j$

$(\circ)$ $(\alpha_i, \alpha_j) < |\alpha_i| |\alpha_j|$ se $i \neq j$

- Poiché $\alpha_i - \alpha_j \notin \Delta \Rightarrow [E_{-\alpha_j}, E_{\alpha_i}] = 0 \Rightarrow q = 0$
  e da $(*)$ $\Rightarrow$ $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0 \quad i \neq j$

$\Rightarrow$ A_{ij} e A_{ji} sono o entrambi zero (se $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$) oppure uno è -1 e l'altro $-1, -2$ o -3.

Nota:

- $(\alpha_i, \alpha_j) = |\alpha_i|\,|\alpha_j| \cos\theta_{ij} \Rightarrow \cos\theta_{ij} = -\frac{\sqrt{A_{ij}A_{ji}}}{2}$

  $\hookrightarrow \in \{0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

- Se $(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0$ $\quad \frac{A_{ij}}{A_{ji}} = \frac{|\alpha_i|^2}{|\alpha_j|^2} \in \{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\}$

• Qndo tutte le roots hanno la stessa lunghezza, l'algebra è detta SIMPLY LACED.

• $M \equiv \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$, $N \equiv \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}$ con $\beta \neq \pm\alpha$
  - for $(\alpha,\beta) \neq 0$, $M \cdot N > 0$
  - $MN = 4\cos^2\theta_{\alpha\beta} \leqslant 3$ $\quad$ ($\cos^2\theta_{\alpha\beta} < 1$ perché $\beta \neq \pm\alpha$)

    $\Rightarrow |M|, |N| \in \{0, 1, 2, 3\}$.

• $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \neq \pm\alpha \Longrightarrow$ L'α-serie attraverso β ha al massimo 4 elem.

Dim. $\beta - p\alpha, \beta - (p-1)\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha$

con $p - q = \langle\beta|\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = M \in \mathbb{Z}$

Ora prendiamo $\gamma \equiv \beta + q\alpha$ e riscriviamo la serie sopra come

$\gamma - (p+q)\alpha, \dots, \gamma - \alpha, \gamma \Rightarrow p + q - 0 = \frac{2(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = M + 2q \equiv M' \in \mathbb{Z}$

Il numero delle root nella serie è $p + q + 1 = M' + 1 \leq 4$. //

- Definiamo ora la COROOT come il vettore

$$\alpha_i^\vee \equiv \frac{2\alpha_i}{|\alpha_i|^2}$$

$\rightarrow$ $A_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j^\vee) \in \mathbb{Z}$

- Un elemento particolare di Δ è la HIGHEST ROOT θ:
  essa è la root t.c. se ci sommiamo qualsiasi root semplice non otteniamo una root.

  $\rightarrow$ tutti gli elem. di Δ possono essere ottenuti da θ per sottrazioni successive di simple roots.

$$\theta = \sum_{i=1}^{r} a_i \alpha_i = \frac{|\theta|^2}{2} \sum_{i=1}^{r} a_i^\vee \alpha_i^\vee \qquad a_i, a_i^\vee \in \mathbb{N}$$

Definiamo il COXETER NUMBER

$$g \equiv 1 + \sum_{i=1}^{r} a_i$$

e il DUAL COXETER NUMBER

$$g^\vee \equiv 1 + \sum_{i=1}^{r} a_i^\vee$$

ES. $sl(3,\mathbb{C})$

- Facciamo una scelta di ROOT POSITIVE. Per farlo, dobbiamo scegliere una base per $\mathcal{H}^*$.
  Di solito si parte dai funzionali e_i che associano alla matrice diagonale l'i-esimo autovalore.
  Per es. se $h = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & -a_1-a_2 \end{pmatrix}$, $e_1(h)=a_1$ $e_2(h)=a_2$
  $e_3(h)=-a_1-a_2$

  Usiamo e_1-e_2, e_2-e_3 come base per $\mathcal{H}^*$, e scriviamo le roots in qta base.

- Ricordiamo che

$$(\alpha(T^1),\alpha(T^2)) = (\alpha^1,\alpha^2) = \underset{\alpha_1}{(2,-1)},\ \underset{-\alpha_1}{(-2,1)},\ \underset{\alpha_2}{(-1,2)},\ \underset{-\alpha_2}{(1,-2)},\ \underset{\alpha_3}{(1,1)},\ \underset{-\alpha_3}{(-1,-1)}$$

con $T^1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ e $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

Vediamo α_1: scriviamo $\alpha_1 = l_1 e_1 + l_2 e_2$ $\quad (e_3 = -e_1-e_2)$

$$\alpha_1(T^1) = l_1 e_1(T^1) + l_2 e_2(T^1) = l_1 - l_2 \overset{!}{=} 2$$
$$\alpha_1(T^2) = l_1 e_1(T^2) + l_2 e_2(T^2) = l_2 \overset{!}{=} -1$$
$$\Rightarrow (l_1,l_2) = (1,-1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = e_1 - e_2$$

Analogam. $\pm\alpha_2 = \pm(e_2-e_3)$ e $\pm\alpha_3 = \pm(e_1-e_3) = \pm(\alpha_1+\alpha_2)$.

- Le root positive sono quindi $\Delta_+ = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$
  Siccome $\alpha_3 = \alpha_1+\alpha_2$, le ROOT SEMPLICI sono α_1, α_2

- La comodità nello scrivere le roots come diff. di e_i è che il prodotto tra le roots è compatibile con $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ (‡)

- Possiamo ora definire la matrice di Cartan:

$$A_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad i,j = 1,2$$

$\rightarrow$ simply laced algebra

(‡) $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ $\qquad h_{\alpha_i}$ t.c. $\alpha_j(h_{\alpha_i}) = K(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j})$

$$(h_{\alpha_i})_{hk} = \delta_{hi}\delta_{ki} - \delta_{h,i+1}\delta_{k,i+1}$$

$$\alpha_j(h_{\alpha_i}) = \delta_{ji} - \delta_{j,i+1} - \delta_{j+1,i} + \delta_{j+1,i+1}$$

$$\| \qquad\qquad // (\checkmark)$$

$$(\alpha_j, \alpha_i) = (e_j - e_{j+1}) \cdot (e_i - e_{i+1})$$

- Possiamo anche capire perché tra le roots di $sl(3,\mathbb{C})$ troviamo $\alpha_1+\alpha_2$, ma non $2\alpha_1+\alpha_2$. Infatti

$$-(p-q) = \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_2)} = -1 \quad \Rightarrow \quad p-q = 1$$

Partendo da E_{α_2}, che è lowest weight (cioè $[E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = 0$) $\to q=0$ possiamo aggiungere solo $p=1$ volte E_{α_1}.

BASE DI CHEVALLEY

Una volta che conosciamo la MATRICE di CARTAN, possiamo ricostruire l'algebra.

- Ad ogni root semplice α_i, associamo tre generatori:

$$e_i \equiv E_{\alpha_i} \qquad f_i = E_{-\alpha_i} \qquad t_i = 2\underbrace{\frac{\alpha_i \cdot H}{|\alpha_i|^2}}_{= H_{\alpha_i}} = 2H_{\alpha_i}$$

- Le loro regole di comm. sono:

$$[h_i, t_j] = 0$$
$$[t_i, e_j] = A_{ji} e^j$$
$$[t_i, f_j] = -A_{ji} f^j$$
$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} t_j$$

(Somma su indici ripetuti è sottointesa.)

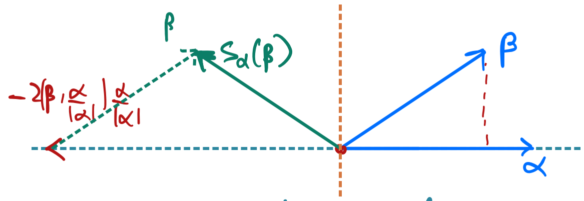
- I rimanenti generatori vengono ottenuti attraverso i commutatori con e_i, f_j, tenendo conto che

$$[Ad(e_i)]^{1-A_{ji}} e_j = 0$$
$$[Ad(f_i)]^{1-A_{ji}} f_j = 0$$

WEYL GROUP

- Per ogni $\alpha \in \Delta$, introduciamo un'involuzione s_α su $\mathcal{H}^*$

$$s_\alpha(\beta) \equiv \beta - 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$



(riflessione rispetto all'iperpiano perpendicolare ad α:
$s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ e $s_\alpha(\beta) = \beta$ se $(\alpha,\beta) = 0$.)

- Il gruppo generato da queste riflessioni $\mathcal{W}$ si chiama WEYL group.
  - È un gruppo FINITO.
  - Il prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ è invariante sotto $\mathcal{W}$

$$\left(\beta - 2\frac{(\beta,\alpha)}{|\alpha|^2}\alpha,\ \gamma - 2\frac{(\gamma,\alpha)}{|\alpha|^2}\alpha\right) = (\beta,\gamma) - 2\frac{(\beta,\alpha)}{\cancel{|\alpha|^2}}\cancel{(\alpha,\gamma)} - 2\frac{\cancel{(\gamma,\alpha)}}{\cancel{|\alpha|^2}}(\beta,\alpha) + 4\frac{(\beta,\alpha)\cancel{(\gamma,\alpha)}}{\cancel{|\alpha|^2|\alpha|^2}}(\alpha,\alpha)$$
$$= (\beta,\gamma).$$

- $\mathcal{W}$ manda roots in roots.

Dim. Sia $\alpha \in \Delta \rightsquigarrow$ associamo $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$.

Sia m un autovalore di $J_3 \equiv H_\alpha$ su autovett. $|\beta\rangle$:

$$m E_\beta = [H_\alpha, E_\beta] = \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|^2} E_\beta = \frac{1}{2}(\alpha^\vee,\beta) E_\beta$$

$$\rightsquigarrow \quad 2m = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \quad \in \mathbb{Z}$$

Se $m \neq 0$, $\exists$ un altro autovett. con autoval. $-m$; tale vett. è $E_{\beta+l\alpha}$ per qlche $l \in \mathbb{Z}$. Quindi

$$-2m = -\frac{2(\alpha,\beta)}{|\alpha|^2} \ ; \quad -2m = \frac{2(\alpha,\beta+l\alpha)}{|\alpha|^2} = \frac{2(\alpha,\beta)}{|\alpha|^2} + 2l \Rightarrow l = -\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$$

Cioè:
se β è una root, anche lo è anche $\beta + l\alpha = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = s_\alpha(\beta)$ //

- $r s_\beta r^{-1} = s_{r(\beta)}$ con r una riflessione

Dim. $r s_\beta r^{-1}(\lambda) = r(s_\beta(r^{-1}(\lambda))) = r\left(r^{-1}(\lambda) - \frac{2(\beta, r^{-1}(\lambda))\beta}{|\beta|^2} \right) =$

$$= \lambda - \underbrace{\frac{2}{|\beta|^2}(\beta, r^{-1}(\lambda))}_{= \frac{2(r(\beta),\lambda)}{(r(\beta), r(\beta))}} r(\beta) = s_{r(\beta)}(\lambda). \quad //$$

- $s_{\alpha_i} \equiv s_i$ (simple Weyl reflections)

$\rightarrow$ Esse mandano POSITIVE roots in POSITIVE roots con la sola eccezione $s_{\alpha_i}: \alpha_i \mapsto -\alpha_i$

$$\alpha \in \Delta_+ \Rightarrow s_i \alpha \begin{cases} \in \Delta_+ & \text{se } \alpha \neq \alpha_i \\ = -\alpha_i & \text{se } \alpha = \alpha_i \end{cases}$$

Dim. $\alpha = \sum_{j=1}^{r} k_j \alpha_j \quad k_j \geq 0 \Rightarrow s_i\alpha = \sum_{j \neq i} k_j \underbrace{s_i \alpha_j}_{\alpha_j - \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i} - k_i \alpha_i = \sum_{j\neq i} \underset{\geq 0}{k_j} \alpha_j + \underset{\geq 0}{\#}\alpha_i$

Se $\alpha \neq \alpha_i$ allora $\exists j$ t.c. $k_j \neq 0$ (>0) $\Rightarrow$ $s_i\alpha$ non può essere negativa. //

- W è un esempio di COXETER GROUP

- $s_i^2 = \mathbb{1}$, $s_i s_j = s_j s_i$ se $A_{ij} = 0$ e

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = \mathbb{1} \quad \text{dove} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 2 & \text{if } A_{ij}A_{ji} = 0 \\ 3 & \text{if } A_{ij}A_{ji} = 1 \\ 4 & \text{if } A_{ij}A_{ji} = 2 \\ 6 & \text{if } A_{ij}A_{ji} = 3 \end{cases}$$

- $s_i \alpha_j = \alpha_j - A_{ji} \alpha_i$

- W è generato dalle simple Weyl reflections.

Dim Prendiamo $\beta \in \Delta_+ \rightarrow \beta = \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Definiamo l'altezza $\ell(\beta) = \sum_i n_i$

Se β non è semplice $\Rightarrow \ell(\beta) > 1 \overset{*}{\Rightarrow} \exists$ almeno una simple root α_j t.c. $\frac{2(\beta, \alpha_j)}{|\alpha_j|^2} > 0$

$\Rightarrow s_j(\beta)$ ha altezza minore $\ell(s_j(\beta)) = \ell(\beta) - \frac{2(\beta,\alpha_j)}{|\alpha_j|^2} < \ell(\beta)$

$*$: se $\frac{2(\beta,\alpha_i)}{|\alpha_i|^2}$ fosse $\leq 0 \; \forall i$, allora $(\beta,\beta) = \left(\sum_i n_i \alpha_i, \beta\right) = \sum_i n_i (\alpha_i, \beta) \leq 0$

ma $(\beta,\beta) > 0$. Assurdo.

Riprendiamo $\beta \in \Delta_+$ (se $\in \Delta_-$, lavoriamo con $-\beta$, visto che $s_{-\beta} = s_\beta$)

- se β è semplice, s_β è una rifless. semplice
- se β non è semplice, $\exists\, s_{i_1}$ t.c. $\beta_1 \equiv s_{i_1}(\beta)$ è pos. root con $\ell(\beta_1) < \ell(\beta)$.
- Se β_1 non è semplice continuiamo: $\beta_2 = s_{i_2}(\beta_1)$ ha $\ell(\beta_2) < \ell(\beta_1)$
- continuiamo, ℓ decresce finché otteniamo una root semplice

$$\gamma = s_{i_k} s_{i_{k-1}} \cdots s_1(\beta) \equiv r(\beta)$$

Usiamo $s_{r(\beta)} = r s_\beta r^{-1} \rightsquigarrow s_\beta = r^{-1} s_\gamma r$

$\Rightarrow s_\beta$ è generato da riflessioni semplici $\forall \beta \in \Delta$. //

- Per simply laced alg. (tutte le roots hanno stessa LUNGHEZZA) possiamo generare tutte le root partendo da una e applicando il gruppo di Weyl. (W preserva le lunghezze)

Se le roots hanno lungh. diverse, ho un'orbita per ogni lunghezza, cioè al massimo due, come vedremo.

Esempio : $\mathfrak{g} = sl(3, \mathbb{C})$

- $r = 2$, $\quad \alpha_1$ e α_2 root semplici

- $\theta_{12} = 2\pi/3 \quad \Rightarrow \quad m_{12} = 3 \qquad (s_1 s_2)^3 = \mathbb{1} \qquad s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$

- Elementi del gruppo : $\{ \mathbb{1}, s_1, s_2, s_1 s_2, s_2 s_1, s_1 s_2 s_1 \} \to |\mathcal{W}| = 6$.

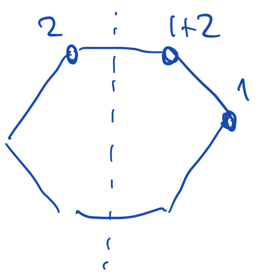
  $\mathcal{W}_{sl(3,\mathbb{C})} \cong S_3$:

$$s_1(\alpha_1) = -\alpha_1 \qquad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad s_1 s_2(\alpha_1) = \alpha_2$$

$$s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad s_2(\alpha_2) = -\alpha_2 \qquad s_1 s_2(\alpha_2) = -\alpha_1 - \alpha_2$$

$$s_1(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2 \qquad s_2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 \qquad s_1 s_2(\alpha_1 + \alpha_2) = -\alpha_1$$

$\mathcal{W} \cong D_6$
(vedi ultima lezione)



$\downarrow$

Se $\alpha_1 = e_1 - e_2 \quad \alpha_2 = e_2 - e_3 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = e_1 - e_3$

$\mathcal{W}$ è dato da permutazioni di e_1, e_2, e_3

$$s_1(e_1 - e_2) = e_2 - e_1 \qquad\qquad s_1 s_2 (e_1 - e_2) = e_2 - e_3$$

analogo per s_2

$$s_1(e_2 - e_3) = e_1 - e_3 \qquad\qquad s_1 s_2 (e_2 - e_3) = e_3 - e_1$$

$$s_1(e_1 - e_3) = e_2 - e_3 \qquad\qquad s_1 s_2 (e_1 - e_3) = e_2 - e_1$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$s_1(e_1) = e_2 \qquad\qquad s_1(e_1) = e_2$$
$$s_1(e_2) = e_1 \qquad\qquad s_1(e_2) = e_3$$
$$s_1(e_3) = e_3 \qquad\qquad s_1(e_3) = e_1$$

Posso generare tutte le roots partendo da α_1 e applicando $\mathcal{W}$:

$$s_1(\alpha_1) = -\alpha_1 \qquad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad s_1 s_2 (\alpha_1) = \alpha_2 \qquad s_2 s_1 s_2 (\alpha_1) = -\alpha_2$$

$$s_2 s_1 (\alpha_1) = s_2 s_1 s_2^2 (\alpha_1) = s_1 s_2 s_1 s_2 (\alpha_1) = -\alpha_1 - \alpha_2$$