PESI (weights) e rappresentazioni

Consideriamo una rap. R con $\rho_R : \mathcal{G} \to End(V)$

t.c. $\rho_R(H^i) \equiv h^i_R \qquad \rho_R(E_\alpha) = e^R_\alpha$

(se chiaro dal contesto, ometteremo il pedice R)

- $h^i_R : V \to V \quad i=1,\dots,r$ sono simultaneam. diagonalizzabili

$$h^i_R \cdot |\lambda\rangle = \lambda^i \, |\lambda\rangle \qquad (|\lambda\rangle \text{ formano una base})$$

- $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^r)$ sono autovalori di $(h^1_R, \dots, h^r_R)$ relativi a $|\lambda\rangle$.

In generale dato $h_R = \rho_R(h)$ con $h \in \mathcal{H}$, abbiamo

$$h_R |\lambda\rangle = \lambda(h) |\lambda\rangle \quad \rightsquigarrow \lambda \in \mathcal{H}^*$$

- λ è chiamato un PESO (weight).

- Nella rap. R:

$$h^i_R(e^R_\alpha |\lambda\rangle) = \underbrace{[h^i_R, e^R_\alpha]}_{= \alpha^i e^R_\alpha} |\lambda\rangle + e^R_\alpha \underbrace{h^i_R |\lambda\rangle}_{\lambda^i |\lambda\rangle} = (\lambda^i + \alpha^i)(e^R_\alpha |\lambda\rangle)$$

$\Rightarrow e^R_\alpha$ aggiunge al peso λ la root α.

- Siamo interessati a RAPP. FINITO-dimensionali

$\Rightarrow$ devono esistere $p, q \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$e_{\alpha}^{p+1}|\lambda\rangle \propto e_\alpha |\lambda+p\alpha\rangle = 0$$
$$e_{-\alpha}^{q+1}|\lambda\rangle \propto e_{-\alpha}|\lambda-q\alpha\rangle = 0 \qquad \forall \alpha \in \Delta$$

ma t.c. se mi fermo a step p e q risp., ho un risult. $\neq 0$.

In particolare, ricordiamo che

$\underset{J_+}{E_\alpha}, \underset{J_-}{E_{-\alpha}}, \underset{J_3}{H_\alpha} \equiv \frac{\alpha \cdot H}{|\alpha|^2}$ formano una sottoalg. $sl_\alpha(2,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{g}$:

$$[H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm E_{\pm\alpha} \qquad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = 2H^\alpha$$

Il vettore $|\lambda\rangle$ è parte di una rap. R_j di $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$:

- diciamo che $|\lambda\rangle$ sia autovett. con autoval. m rispetto a $J_3 \equiv H_\alpha^R = \rho_R(H_\alpha)$
- $\exists\, p, q$ t.c. $m = j-p = -j+q$
- $\frac{(\alpha,\lambda)}{|\alpha|^2}|\lambda\rangle \overset{(*)}{=} \frac{\alpha \cdot H^R}{|\alpha|^2}|\lambda\rangle = J_3|\lambda\rangle = m|\lambda\rangle$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2(\alpha,\lambda)}{|\alpha|^2} = -(p-q) \in \mathbb{Z}} \qquad (*)$$

(*) $H_\alpha^R|\lambda\rangle = \frac{h_\alpha}{|\alpha|^2}|\lambda\rangle = \frac{\lambda(h_\alpha)}{|\alpha|^2}|\lambda\rangle = \frac{(\alpha,\lambda)}{|\alpha|^2}|\lambda\rangle$

Rapp. FONDAMENTALE di $sl(3,\mathbb{C})$

- $sl(3,\mathbb{C})$ è definita come un'algebra di matrici 3×3
  $\Rightarrow$ qto ci dà una rapp. 3dim. di $sl(3,\mathbb{C})$.

- $H^1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad H^2 = \sqrt{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

  ↪ possiamo subito leggere i PESI di qta rap.:
  - ci sono 3 autovettori : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - i risp autovalori sono $(\lambda^1, \lambda^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

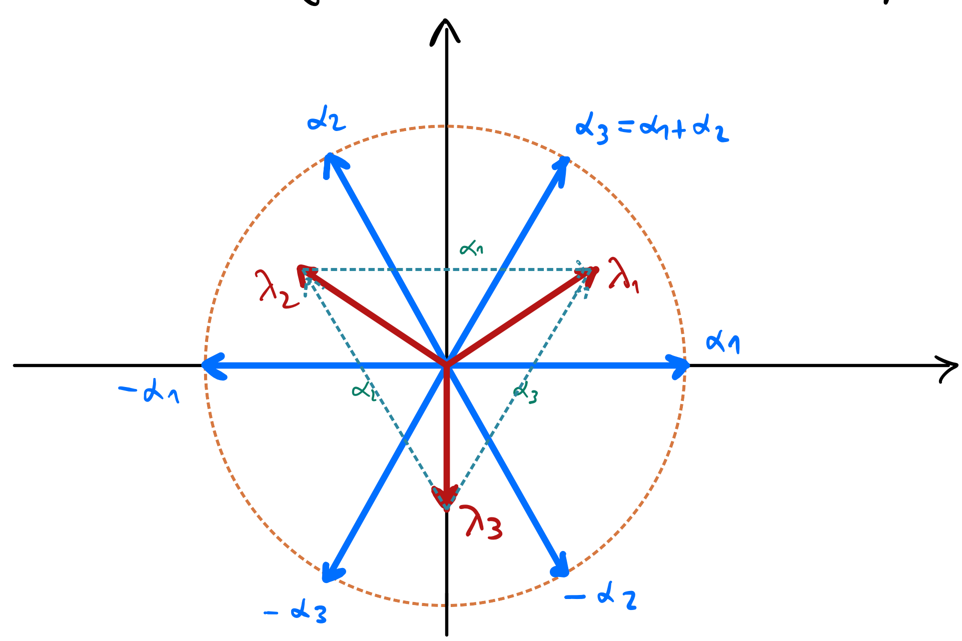
- Ricordiamo $E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  con $\alpha_1 = (\sqrt{2}, 0) \qquad \alpha_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

  In qta base, (α, β) è semplicem. dato da $\alpha^i \beta^i$

Verifichiamo: $E_{\alpha_1} \left|\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle = V \left|\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle$ ← $= \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \overset{\alpha_1}{\overset{\|}{(\sqrt{2}, 0)}}$

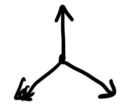
- Posso disegnare le roots e i pesi assieme:



Avremmo potuto indovinare qti pesi, chiedendo d'avere rap (non triviale) di dim. minore, cioè una α_i può essere sommata solo una volta ($1/2$-rap. per $sl_\alpha(2,\mathbb{C})$)

- Qta rep 3-dim. è chiamata RAPP. FONDAMENTALE, $\underline{3}$ o F
- Qual è la sua rep coniugata, RAPP. ANTI-FONDAM., $\overline{\underline{3}}$ o $\bar{F}$?

$$t^a_{\bar{R}} = -t^{aT}_R \Rightarrow \bar{H}^i = -H^i \Rightarrow \lambda^i_{\bar{F}} = -\lambda^i_F :$$



(Anche qta si intuiva se cercavamo rep. di dim. minima.)

- Osservazione: l'insieme Δ è simmetrico sotto la riflessione rispetto agli assi $\perp$ alle roots.

Per es. prendiamo α_1: S_{α_1} : $\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1 \leftrightarrow -\alpha_1$, $-\alpha_2 \leftrightarrow -\alpha_2-\alpha_3$

$$S_{\alpha_1}(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

$$S_{\alpha_1}(\alpha_1) = \alpha_1 - 2\alpha_1 = -\alpha_1$$

$$S_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2 - 2\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_1$$

...

LATTICES & CONGRUENCE CLASSES

Data una base $v_1, \dots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$, un RETICOLO o LATTICE (in inglese), è l'insieme

$$\Lambda_v = \{ n_1 v_1 + \dots + n_n v_n \mid n_i \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} v_1 + \dots + \mathbb{Z} v_n$$

Data un'algebra di Lie $\mathcal{G}$ di rango r, ci sono tre reticoli importanti:

$$\Lambda_w = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_n \quad \leftarrow \text{weight lattice}$$

$$\Lambda_\alpha = \mathbb{Z}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_n \quad \leftarrow \text{root lattice}$$

$$\Lambda_{\alpha^\vee} = \mathbb{Z}\alpha_1^\vee + \dots + \mathbb{Z}\alpha_n^\vee \quad \leftarrow \text{coroot lattice}$$

- Λ_w è il reticolo di tutti i pesi; siccome in una irrep, agendo su un peso con E^α, esso viene shiftato di α, i pesi di una irrep. differiscono di elementi di Λ_α. $\Lambda_\alpha \subseteq \Lambda_w$

- Per $G_2, F_4, E_8 \rightsquigarrow \Lambda_w = \Lambda_\alpha$
  negli altri casi $\Lambda_\alpha \subset \Lambda_w$.

- Λ_w e Λ_α sono dei gruppi discreti additivi (abeliani).

  Λ_α è un sottogruppo normale di $\Lambda_w \Rightarrow \Lambda_w / \Lambda_\alpha$ è un gruppo ed è FINITO

- Gli elementi di Λ_w/Λ_α sono dette
  CLASSI DI CONGRUENZA.
- Una data irrep sta in una classe di congruenza.
- Date due irrep. R_1, R_2, la classe di congruenza di $R_1 \otimes R_2$ è la somma (nel senso del gruppo Λ_w/Λ_α) delle classi di R_1 e R_2.

Es. • $su(2)$ ha due classi di congruenza:

$\omega \in \mathbb{Z}, \; \alpha \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow 0, 1 \bmod 2 \qquad \Lambda_w/\Lambda_\omega \cong \mathbb{Z}_2$

• $su(3)$ ha tre classi

• $su(N)$ " N classi

In generale il gruppo Λ_w/Λ_α per le algebre semplici è

A_r	B_r	C_r	D_r	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\mathbb{Z}_{r+1}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $r=0 \bmod 2$ $\mathbb{Z}_4$ $r=1 \bmod 2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$su(r+1)$	$so(2r+1)$	$sp(2r)$	$so(2r)$					