

Correnti in pressione

Definizioni

Reti in pressione

Regimi di moto:

laminare

turbolento

Raggio e diametro idraulico

Moto in condotte in regime laminare e turbolento

Perdite di carico

Indice di Resistenza

Formule pratiche

Scabrezza di parete

Esperimenti di Nikuradse

Diagramma di Moody

Perdite di carico localizzate

Condotte in serie e in parallelo

Impianti Idraulici: risoluzione di problemi progetto e di verifica

N.B.: Questo indice NON è esaustivo e NON sostituisce il libro di testo

Alcune immagini sono prese dal libro di testo (Meccanica dei Fluidi, Y.A.Cengel e J.M. Cimbala, Ed. It G. Cozzo e C. Santoro) per scopi didattici

Definizione ed utilizzo pratico

Corrente in pressione: E' una corrente di liquido o gas che si muove all'interno di un condotto di sezione costante o variabile riempiendone tutta la sezione trasversale.

Il fluido si muove per:

- **effetto della gravità**, dovuto alla differenza di quota geodetica tra le sezioni iniziali e finali della condotta;
- grazie alla **prevalenza di una pompa** posta lungo la condotta

Il carico fornito alla corrente viene bilanciato dalle perdite per attrito e turbolenza per una assegnato valore della portata

Utilizzo: reti acquedottistiche o distribuzione del gas, oleodotti, impianti di riscaldamento o condizionamento, impianti industriali dove si convogliano fluidi per finalità diverse.....

Rete in pressione

Costituita da:

- Tubazioni di diametro costante e/o sezione variabile (circolare, quadrata, etc.)
- Elementi di raccordo (curve, convergenti, elementi a tre o 4 vie etc.)
- Valvole di regolazione
- Macchine (pompe, turbine)

Problemi di progetto:

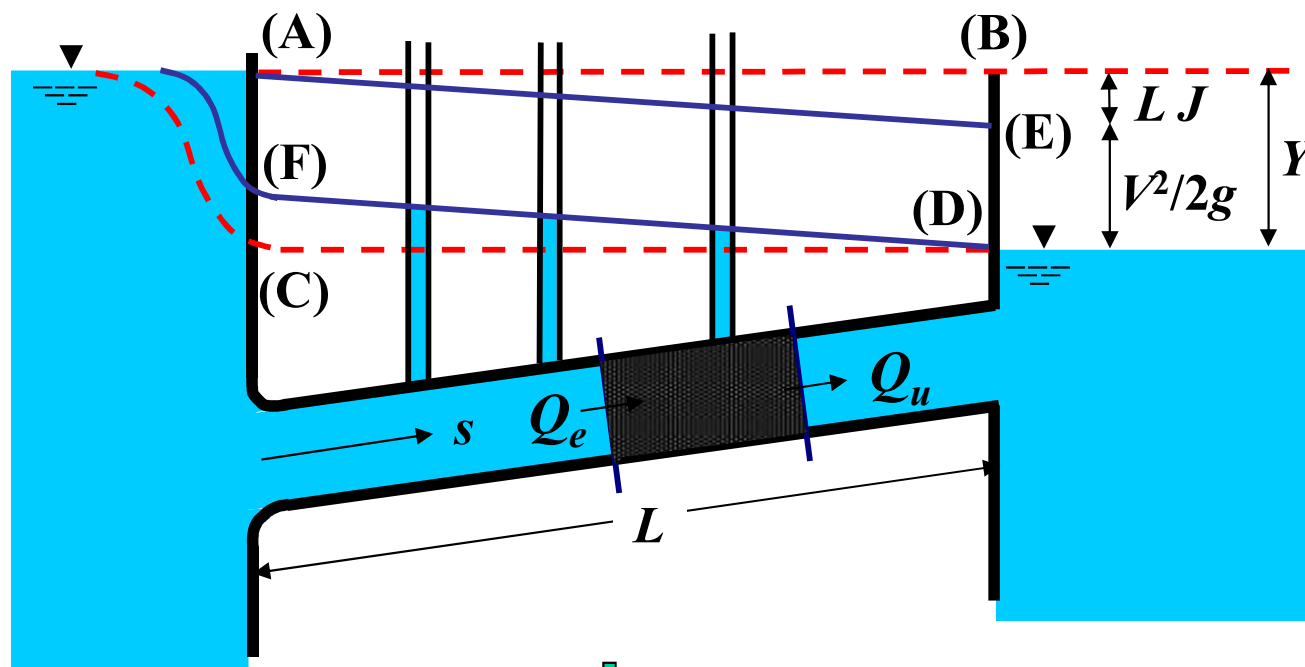
- Assegnate le caratteristiche geometriche e l'energia disponibile si determina la portata;
- Assegnata la portata che si vuole convogliare, per date caratteristiche geometriche, si determina l'energia necessaria a convogliare il flusso

Geometria delle condotte:

- Condotte a sezione circolare quando la pressione di esercizio è elevata (acquedotti, gasdotti, oleodotti etc.)

Condotte a sezione quadrata/rettangolare quando la pressione di esercizio è bassa (impianti di condizionamento....)

Schema di variazione del carico in fluidi reali



$H \neq \text{costante}$

Viscosità



Sforzi
tangenziali



calore

Fluido ideale

LCT $\Rightarrow$ (AB); LP $\Rightarrow$ (CD)

Equazione del moto:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

Equazione di continuità:

$$Q_e = Q_u \Rightarrow V_e A_e = V_u A_u$$

Fluido reale (dissipazioni di energia)

LCT $\Rightarrow$ (AE); LP $\Rightarrow$ (FD)

Equazione del moto:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -J$$

Equazione di continuità:

$$Q_e = Q_u \Rightarrow V_e A_e = V_u A_u$$

Carico totale corrente

$$H = h + \alpha V^2 / (2g)$$

Cadente

$$J = - \partial H / \partial s$$

Cadente Piezometrica

$$J = - \partial h / \partial s$$

Regimi di moto : Moto laminare e turbolento

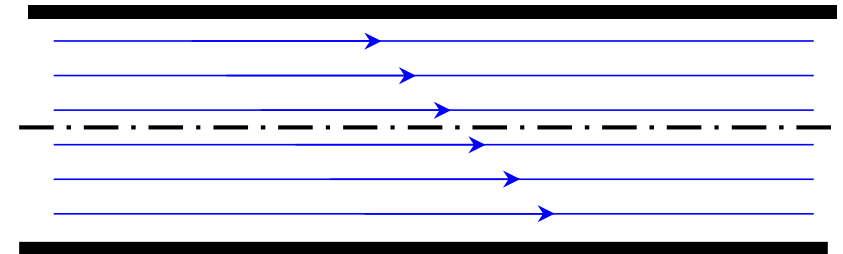
Due modalità di movimento o REGIMI DI MOTO.

Moto laminare: le traiettorie e le linee di corrente procedono in maniera ordinata e il trasferimento di quantità di moto tra elementi di fluido adiacenti è dovuto alla viscosità.

$$Re < 2000$$



MOTO LAMINARE



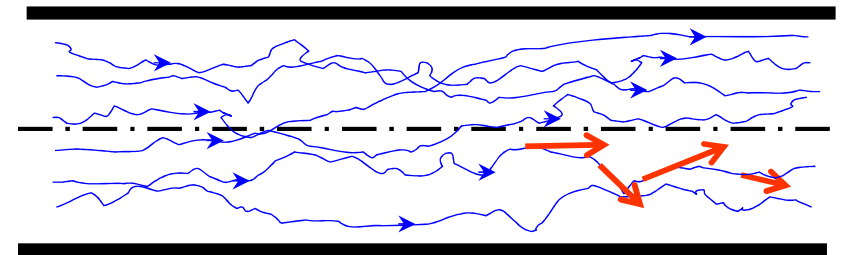
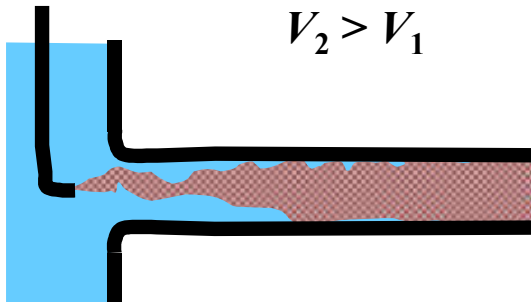
Moto turbolento: moto caotico non rappresentabile in maniera deterministica.

Il trasferimento di quantità di moto tra strati adiacenti di fluido avviene per trasporto istantaneo legato ad un moto disordinato degli elementi di fluido

$$V_2 > V_1$$

MOTO TURBOLENTO

$$Re > 2000 - 4000$$



Numero di Reynolds, basato sul diametro D, $Re = \rho VD/\mu$, indice del grado di turbolenza

Velocità e lunghezza scala nelle condotte in pressione

La velocità varia da 0 sulle pareti al valore massimo sull'asse di simmetria

La variazione dipende dal regime di moto (laminare/turbolento) e dalla forma della sezione.

Si considera la velocità media V sulla sezione e il moto unidimensionale lungo l'asse della condotta

La lunghezza scala caratteristica è una dimensione trasversale che fornisce una misura della sezione: **Raggio Idraulico**

$$R_i = \frac{\text{Area della sezione}}{\text{Perimetro bagnato}} = \frac{A}{C_b} \rightarrow [m]$$

Il **Diametro Idraulico** $D_i=4R_i$ viene spesso utilizzato per definire **Re**

Raggio idraulico e diametro idraulico

$$R_i = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}$$

$$D_i = 4R_i = D$$

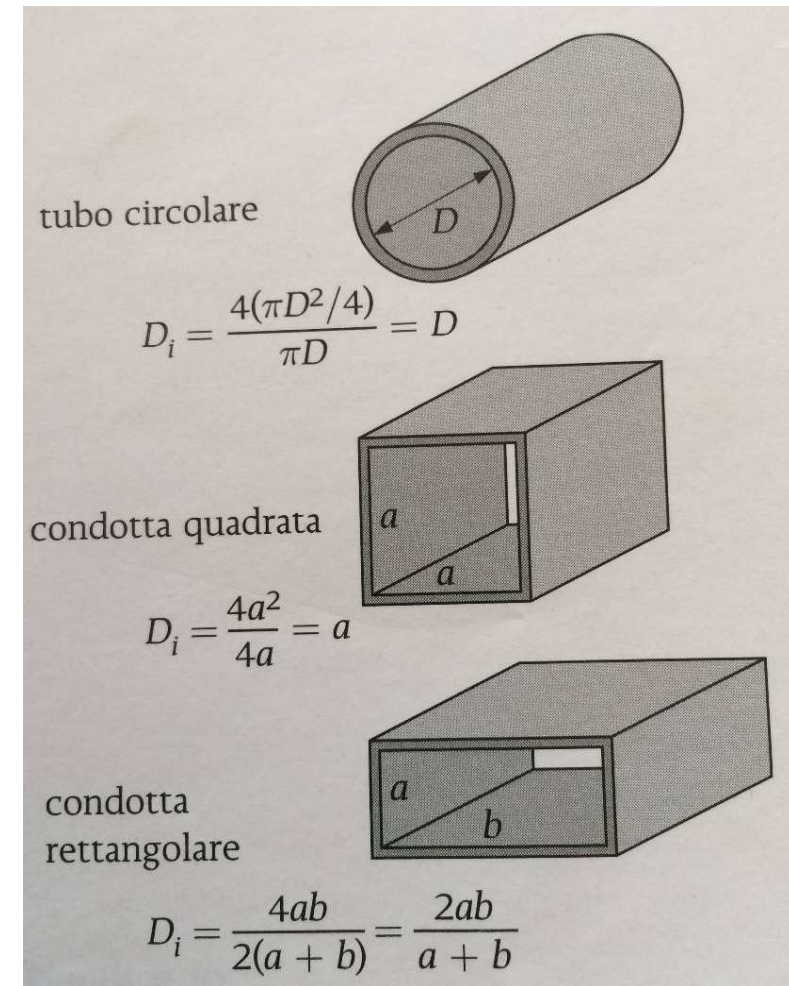
$$R_i = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

$$D_i = 4R_i = a$$

$$R_i = \frac{ab}{2(a+b)}$$

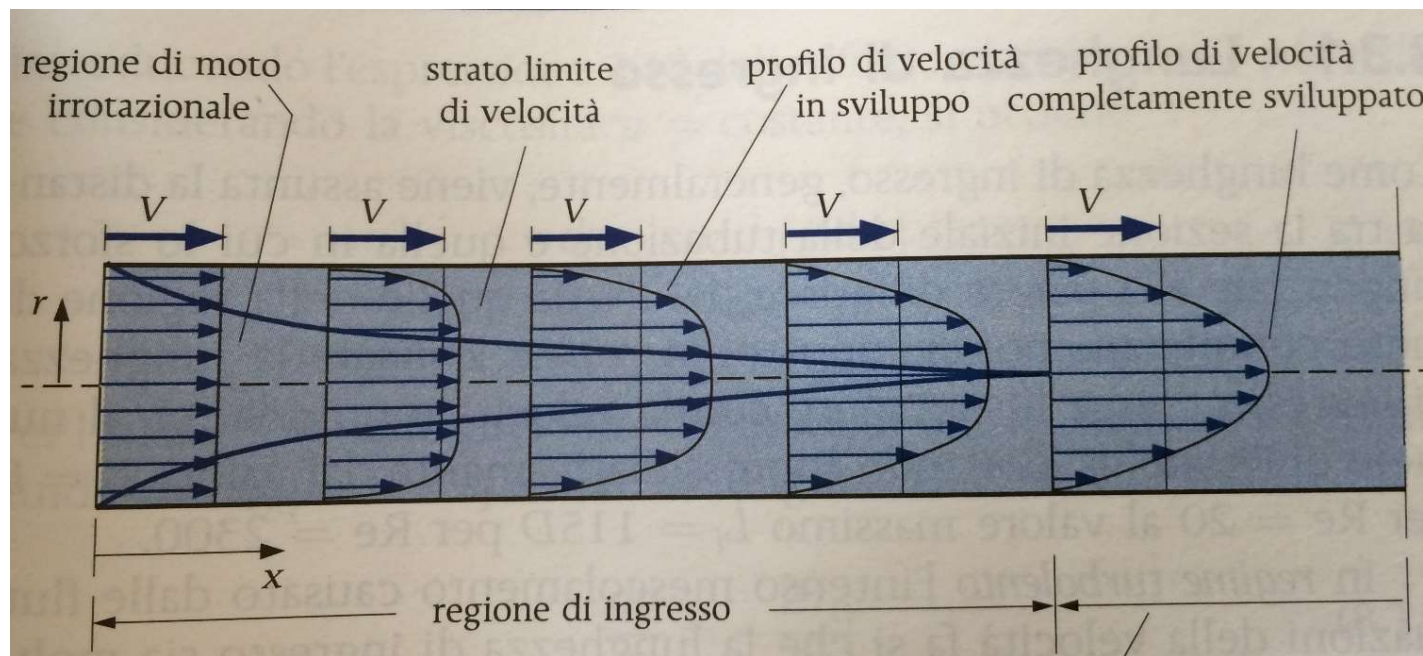
$$D_i = 4R_i = \frac{2ab}{(a+b)}$$

$$\text{per } b \rightarrow \infty \quad R_i \rightarrow \frac{a}{4} \quad D_i = 4R_i \rightarrow a$$



Regione di ingresso e moto completamente sviluppato

Quando un flusso entra in un condotto cilindrico, sviluppa uno **strato limite**, una regione di flusso caratterizzata da gradienti trasversali di velocità. Lo strato limite si allarga verso valle fin quando arriva fino all'asse di simmetria.

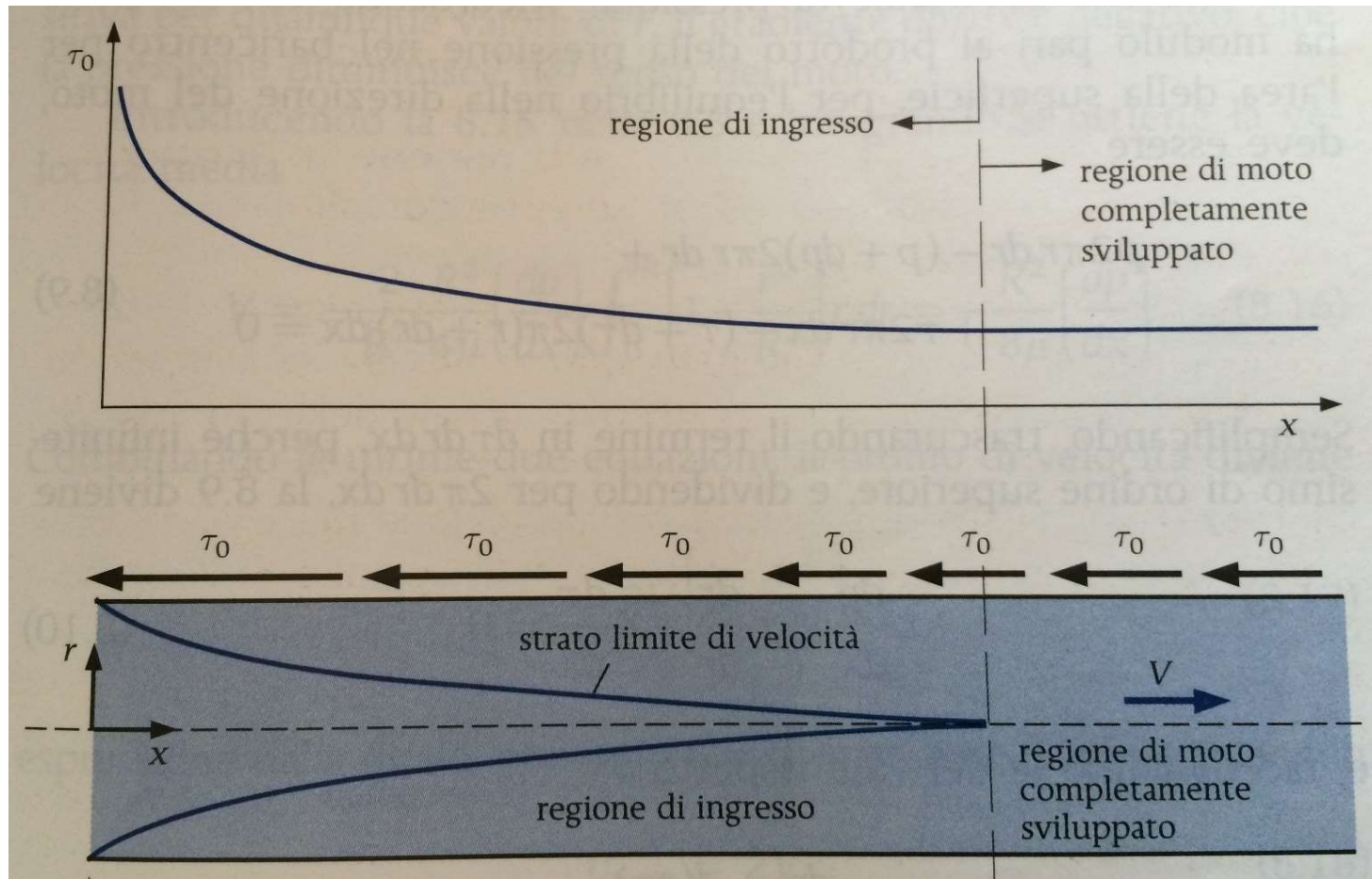


Regione di ingresso: regione lungo la quale si sviluppa lo strato limite

Regione completamente sviluppata: regione a valle di quella di ingresso, lungo la quale le condizioni di flusso rimangono invariate

Regione di ingresso e moto completamente sviluppato

Lo sforzo medio sulla parete decresce verso valle nella regione di ingresso e si mantiene costante nella regione completamente sviluppata



Moto laminare

Il profilo di velocità ha un andamento di tipo parabolico su un piano di simmetria assiale.
(determinazione analitica nel seguito, come soluzione delle equazioni del moto)

$$v = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 2V \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$V = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$v_{\max} = 2V$$

Caduta di pressione: condotta orizzontale in regime laminare

Dal legame tra la velocità media e il gradiente di pressione longitudinale è possibile calcolare la caduta di pressione tra due sezioni di una *condotta orizzontale*:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{p_1 - p_2}{L} = -\frac{dp}{dx} = \frac{8\mu V}{R^2}$$

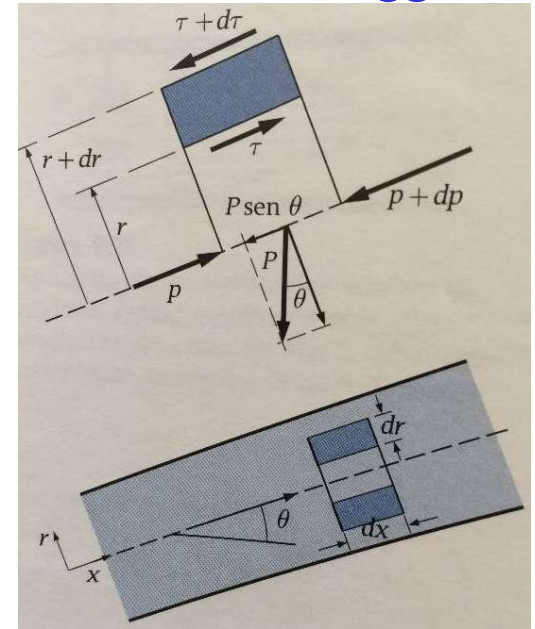
$$Q = VA = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L} \pi R^2 = \frac{\pi}{128} \frac{D^4}{\mu} \frac{\Delta p}{L}$$

A parità di portata, raddoppiando il diametro, la caduta di pressione diventa 16 volte più piccola

Caduta di pressione: condotta inclinata in regime laminare

Dall'equilibrio delle forze, in condizioni stazionarie su un elemento anulare di raggio r (si veda la figura):

$$\begin{aligned} & p 2 \pi r dr - (p + dp) 2 \pi r dr + \\ & \tau 2 \pi r dx - (\tau + d\tau) 2 \pi (r + dr) dx \\ & - \rho g 2 \pi r dr dx \sin \theta \\ & = 0 \end{aligned}$$



Da notare che per un condotto cilindrico in condizioni stazionarie, i contributi alla spinta forniti dalle variazioni di quantità di moto sono nulli. Dividendo tutto per $-2 \pi dr dx$:

$$r \frac{dp}{dx} + \tau \frac{dr}{dr} + r \frac{d\tau}{dr} + r \rho g \sin \theta = 0 \quad \text{che si può scrivere}$$

nel modo seguente:

$$r \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) + \frac{d(r \tau)}{dr} = 0$$

Caduta di pressione: condotta inclinata in regime laminare (2)

Considerando che $\tau = \mu dv/dr$

integrando l'equazione differenziale con condizioni al contorno:

$$v = 0 \quad \text{per } r = R$$

$$dv/dr = 0 \quad \text{per } r = 0$$

otteniamo:

$$v = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = 2V \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$V = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) = \frac{\Delta p - \rho g L \sin \theta}{32 \mu L} D^2$$

$$Q = \frac{\pi}{128} \frac{\Delta p - \rho g L \sin \theta}{\mu L} D^4$$

Caduta di pressione: perdita di carico

- 1) La soluzione è indipendente dal fatto che la condotta sia orizzontale o inclinata, a meno del contributo della forza peso che si somma a quello dato dal gradiente di pressione
- 2) Se consideriamo che $L \sin \theta = \Delta z$ è la differenza di quota tra le sezioni a pressione, rispettivamente, p_1 e p_2 :

$$\frac{\Delta p}{\rho g} - L \sin \theta = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} - (z_2 - z_1) = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = J L$$

Dove **j, cadente piezometrica** è la diminuzione di quota piezometrica per unità di lunghezza.

Considerando che in condotte a sezione costante la quota cinetica è costante, la diminuzione di quota piezometrica coincide con la diminuzione di carico, e quindi :

$$\Delta H = J L$$

$$J = \frac{\Delta H}{L}$$

Legame tra cadente e sforzo sulla parete

Se consideriamo il bilancio della quantità di moto scritto precedentemente:

$$r \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) + \frac{d(r \tau)}{dr} = 0$$

Integrando tra 0 ed R

$$R \tau_0 = \frac{R^2}{2} \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right)$$

otteniamo lo sforzo sulla parete espresso mediante la cadente J

$$\tau_0 = \frac{R}{2} \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) = \rho g R_i J$$

Legame tra portata e perdite di carico

Ricordando che:

$$\frac{\Delta p}{\rho g} - L \sin \theta = JL$$

La portata può essere scritta come

$$Q = \frac{\pi}{128} \frac{\Delta p - \rho g L \sin \theta}{\mu L} D^4 = \frac{\pi}{128} \frac{\rho g}{\mu} J D^4$$

e quindi possiamo esprimere la cadente in funzione della portata o della velocità

$$J = \frac{128}{\pi} \frac{\mu}{\rho g} \frac{Q}{D^4} = 32 \frac{\mu}{\rho g} \frac{V}{D^2} = \frac{32}{\text{Re}} \frac{V^2}{gD}$$

La **formula di Poiseuille** dice che in regime laminare la perdita di carico è direttamente proporzionale alla viscosità cinematica e alla velocità e inversamente proporzionale al quadrato del diametro

Indice di resistenza

E' conveniente esprimere il legame tra portata e cadente mediante un indice di resistenza, con formule che siano indipendenti da:

- regime di moto (laminare o turbolento)
- condizioni della condotta (liscia o scabra)
- forma della sezione

Formula di Darcy-Weisbach: la struttura della formula deve essere variazione di carico per unità di lunghezza, quindi

Portata, la formula assume la forma $J = \lambda \frac{V^2}{2gD}$ dovendo legare la cadente alla

Se teniamo conto della formula riportata nella slide precedente, valida per moto laminare in condotta a sezione circolare:

$$J = 32 \frac{\mu}{\rho g} \frac{V}{D^2} = \lambda \frac{V^2}{2gD} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

**Formula
di Fanning**

In regime laminare l'indice di resistenza è inversamente proporzionale al numero di Reynolds

Condotte non circolari

Valgono le stesse formule dove la lunghezza scala geometrica è il diametro idraulico e si considerano coefficienti di forma che sono funzione della forma della sezione

$$J = k_f \frac{\mu}{\rho g} \frac{V}{D_i^2}$$

$$\lambda = \frac{c_f}{\text{Re}}$$

Sezione		c_f
rettangolare	a/b	
	1	56,9
	2	62,2
	3	68,4
	4	72,9
	6	78,8
	8	82,3
	∞	96,0
ellittica	a/b	
	1	64,0
	2	67,3
	4	73,0
	8	76,6
	16	78,2
triangolare isoscele	θ	
	10°	50,8
	30°	52,3
	60°	53,3
	60°	53,3
	90°	52,6
	120°	51,0

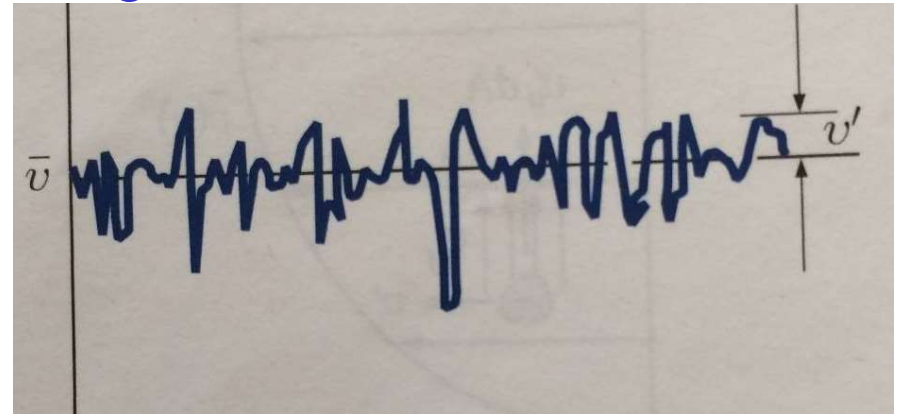
Moto turbolento

All'aumentare del numero di Reynolds, il moto diventa instabile e gli elementi di fluido viaggiano su traiettorie caotiche

Tale caoticità trasporta massa, quantità di moto ed energia da zone di flusso ad altre, molto rapidamente.

Se il moto è turbolento e le misure di velocità sono caotiche, posso suddividere il moto in una componente media e in una fluttuante:

$$u(t) = U + u'(t)$$



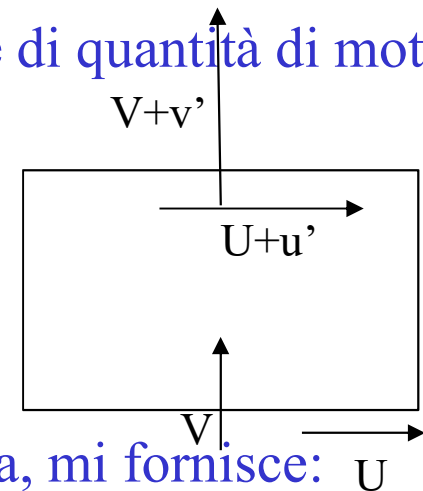
Se consideriamo un volumetto come in figura il flusso trasversale di quantità di moto sarà:

$$\rho(U + u')(V + v') - \rho UV = \rho(u'V + Uv' + u'v')$$

Se facciamo una media nel tempo (indicata dalla overbar)

$$\overline{\rho(u'V + Uv' + u'v')}$$

considerando che la media di una media per la fluttuazione è nulla, mi fornisce:



$$\overline{\rho u' v'}$$

Trasferimento di quantità di moto in flussi vicino ad una parete

Vicino ad una parete, il profilo di velocità va da zero (sulla parete) ad un valore massimo (sull'asse di simmetria per le condotte)

Il trasferimento di quantità di moto tra due strati di flusso medio successivi avviene per sforzo viscoso e per trasferimento turbolento

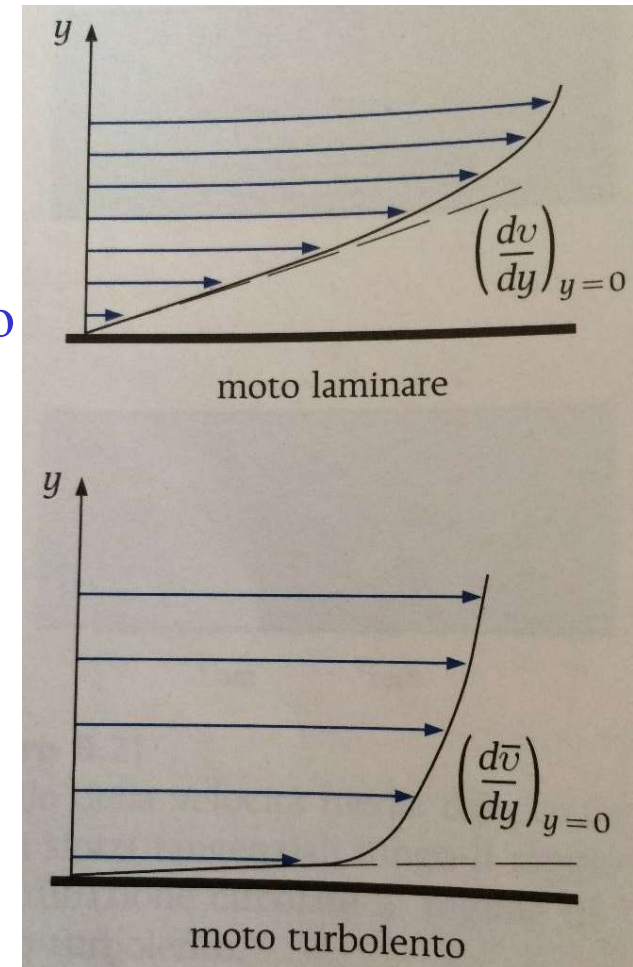
$$\mu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{\rho u' v'}$$

E il secondo termine, per i fluidi poco viscosi come aria ed acqua, è di qualche ordine di grandezza superiore al primo.

Se esprimiamo
$$-\overline{\rho u' v'} = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad (\mu + \mu_T) \frac{\partial U}{\partial y}$$

μ_T è una viscosità turbolenta, che non è una proprietà del fluido ma un tentativo di parametrizzare la turbolenza a scopi

con $\mu_T \gg \mu$ ingegneristici



Profilo di velocità in moto turbolento

L'analisi dimensionale mostra che in uno strato limite la viscosità e l'attrito controllano il campo di moto. Si possono definire quindi una velocità caratteristica e una lunghezza caratteristica

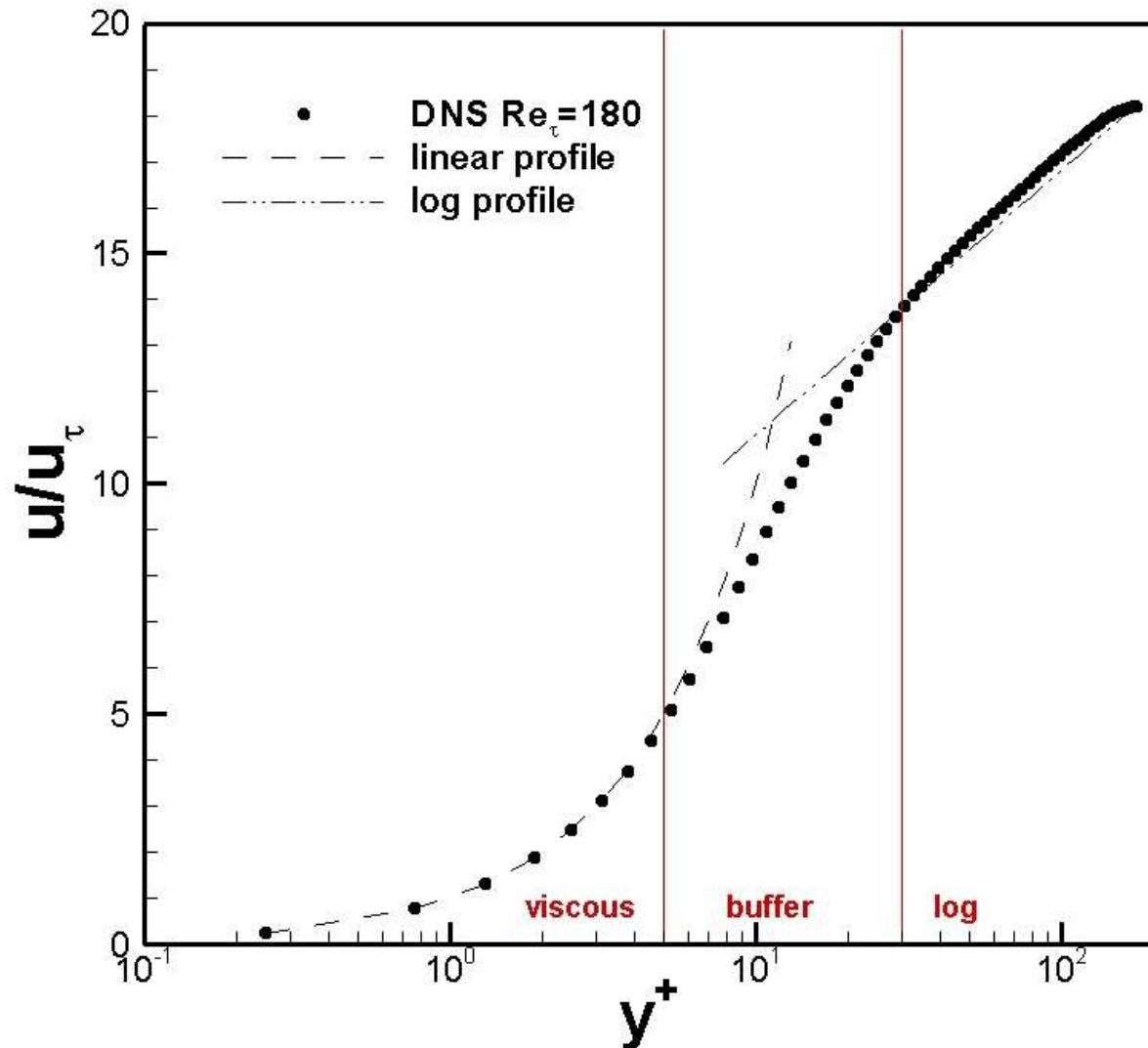
$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad , \quad y^* = \frac{\nu}{u^*}$$

L'analisi sperimentale mostra che:

<i>per</i>	$y < 5 y^*$	$\mu \frac{\partial U}{\partial y} \gg \overline{\rho u' v'}$	$\frac{u}{u^*} = \frac{y}{y^*}$
<i>per</i>	$5 y^* < y < 30 y^*$	$\mu \frac{\partial U}{\partial y} \approx \overline{\rho u' v'}$	curva non det. da an. dim.
<i>per</i>	$y > 30 y^*$	$\mu \frac{\partial U}{\partial y} \ll \overline{\rho u' v'}$	$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y^*} + B$

Profilo di velocità in moto turbolento

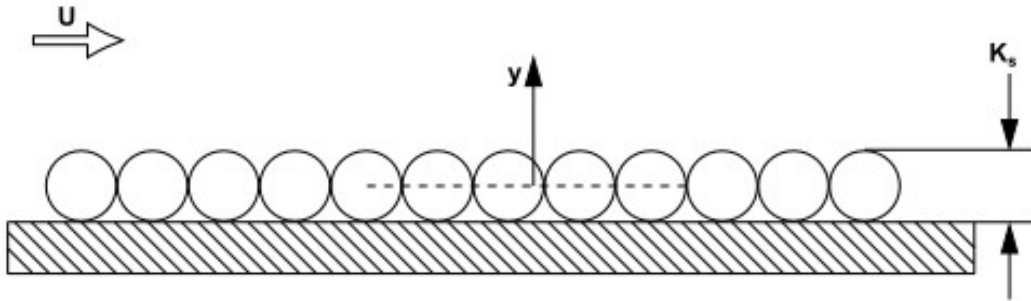
Confronto tra risultati di una simulazione numerica e
linea teorica con
 $\kappa=0.41$ e $B=5.5$



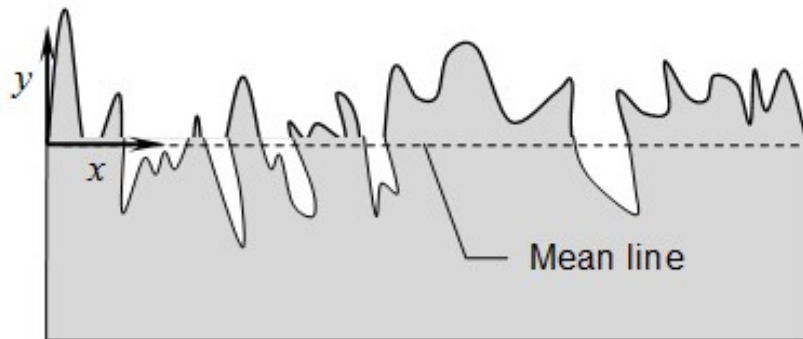
Scabrezza (1)

L'esperienza insegna che le pareti corrugate o scabre provocano una perdita di carico maggiore rispetto al caso di parete liscia.

La scabrezza può essere uniforme

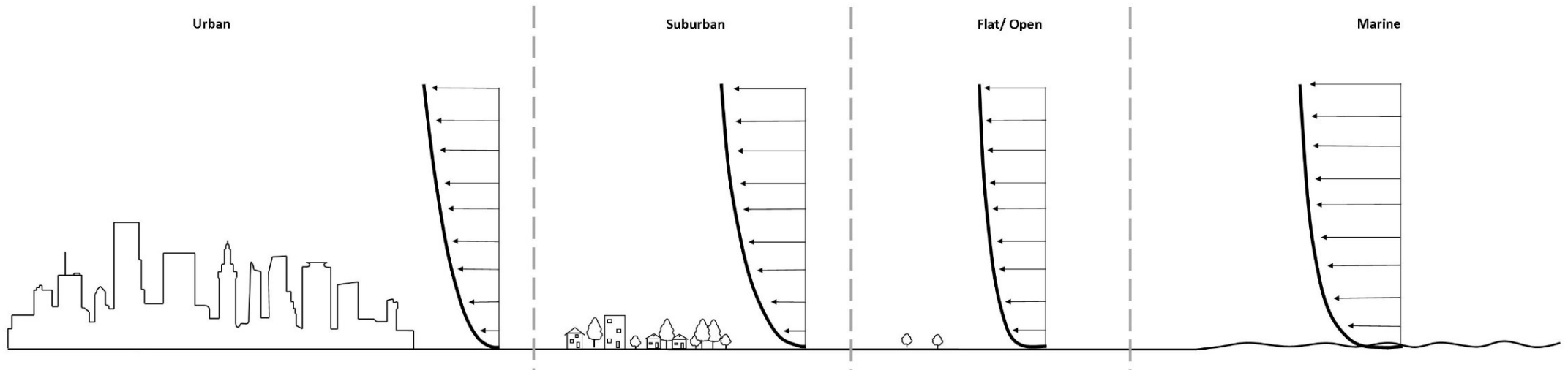


o irregolare

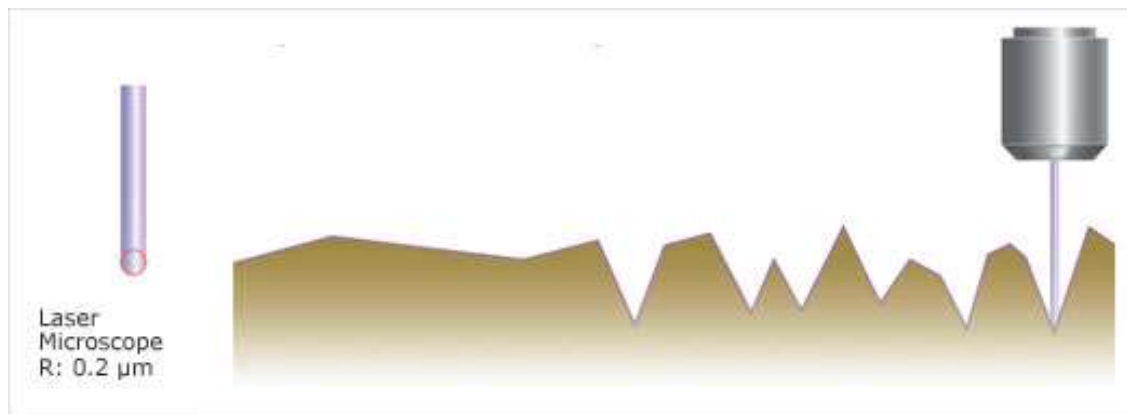


Scabrezza (2)

La scabrezza va vista rispetto al problema che si sta studiando:
In uno strato limite atmosferico la urban canopy rappresenta una scabrezza



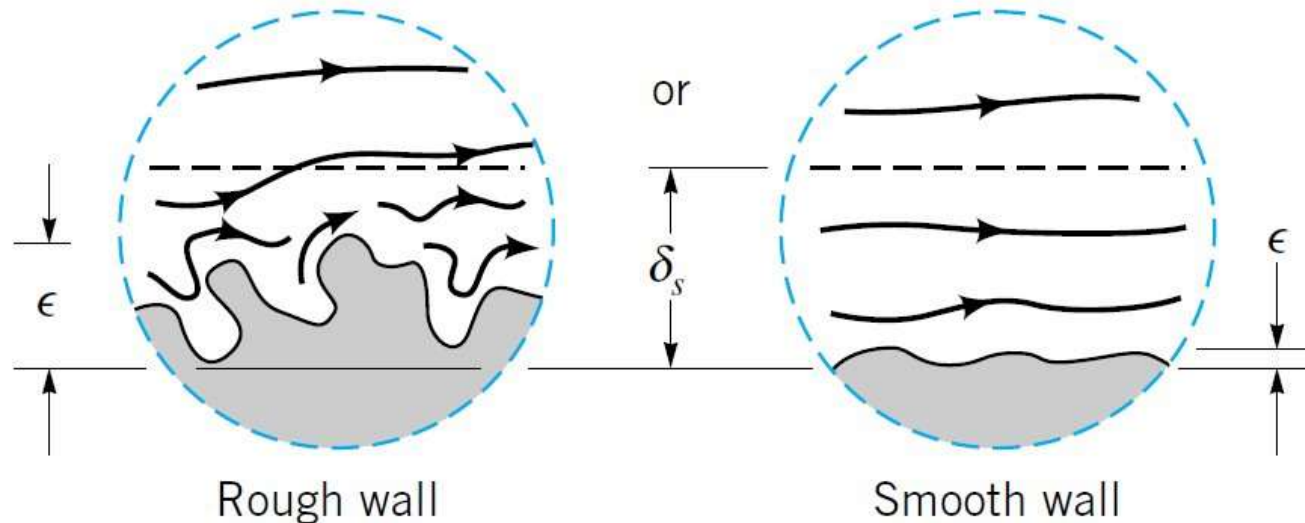
In un flusso all'interno di microcondotti la scabrezza è dell'ordine dei micron



Effetto della scabrezza

In uno strato limite turbolento, esiste sempre, in prossimità della parete una regione sottile dove lo scambio di quantità di moto è regolato dalla viscosità (substrato viscoso)

Una parete è considerata liscia se l'altezza media delle protuberanze è inferiore all'altezza del substrato viscoso. In questo caso le fluttuazioni verticali di velocità restano comparabili a quelle su una parete piatta



La parete è considerata scabra se le protuberanze cominciano ad emergere dalla regione viscosa .

L'effetto della scabrezza è di generare microvortici che producono un forte aumento delle fluttuazioni verticali di velocità e un corrispondente aumento del contributo $\overline{\rho u' v'}$

Parametrizzazione scabrezza

La scabrezza sullo sviluppo del campo di moto turbolento si esplica secondo due parametri geometrici fondamentali:

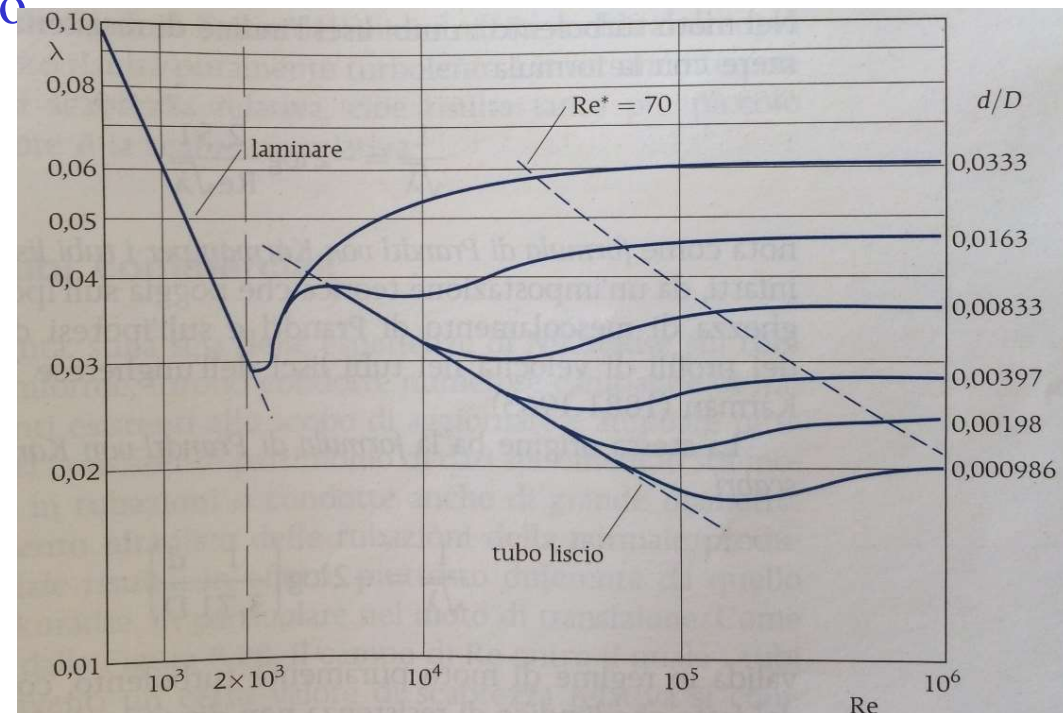
- Una lunghezza scala verticale (per esempio l'altezza media delle protuberanze)
- Un elemento di forma che quantifichi la densità di protuberanze per unità di lunghezza

Esperimenti di Nikuradse eseguiti con scabrezza uniforme (granelli di sabbia) con diametri via via crescenti mostrano un andamento come in figura:

Regime laminare unica curva $\approx Re^{-1}$

Zona intermedia dove il flusso è turbolento ma la viscosità fa sentire i suoi effetti nel sottostrato viscoso

Zona di flusso indipendente da Re dove la viscosità è ininfluente



Valutazione delle perdite di carico continue – moto uniforme

MOTO UNIFORME - condotto circolare cilindrico

$$J = f\left(\text{Re}, \frac{r}{D}\right) \frac{V^2}{2 g D}$$

Formula di
Darcy-Weisbach

$$f(Re, r/D) = \lambda(Re, r/D)$$

Coeff. di resistenza
(vd analisi dimensionale)

Il parametro dimensionale r rappresenta una altezza scala caratteristica per la scabrezza:

Negli esperimenti di Nikuradse è il diametro dei granelli di sabbia

Leggi di resistenza

$$J = \lambda \frac{V^2}{2 g D}$$

(Darcy-Weisbach)

λ : “Coefficiente di resistenza”

$$\lambda = \lambda \left(Re ; \frac{r}{D} \right) \quad \text{dove} \quad Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad \text{Numero di Reynolds (adimensionale)}$$

r [m] = scabrezza “equivalente” della superficie

D [m] = diametro del condotto

**Sperimentale
(e Analitico):**

Sperimentale:

Moto laminare

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

*N.B. : in questo caso non dipende
dalla scabrezza del contorno*

Moto turbolento

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \cdot \frac{r}{D} \right)$$

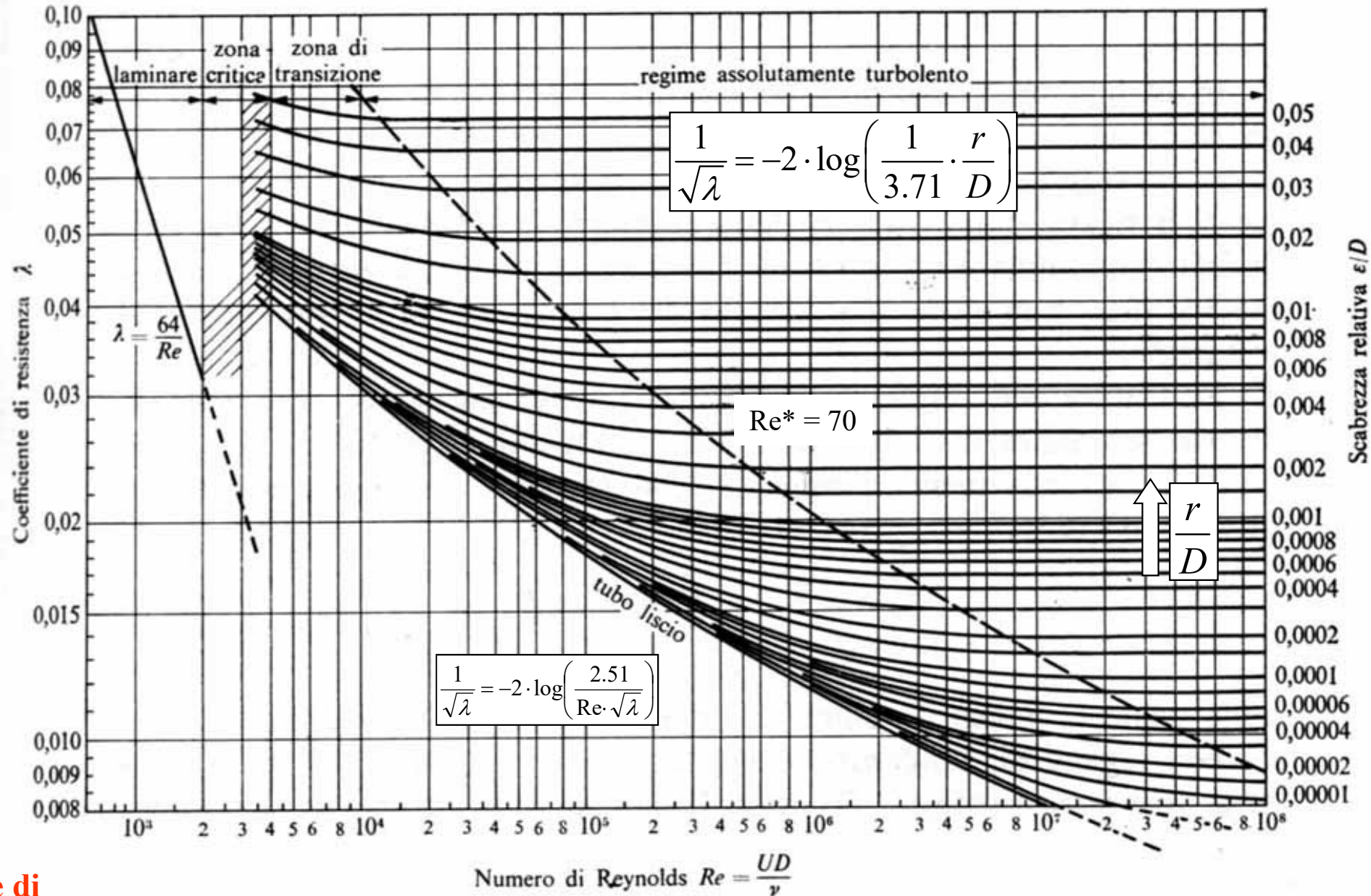
(Colebrook)

N.B. : questa è una formula implicita

Abaco di Moody

formula di Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \cdot \frac{r}{D} \right)$$



Definizione di
scabrezza equivalente

Diagramma di Moody: curve $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$ ottenute dalla formula di Colebrook con diversi valori costanti della scabrezza relativa ϵ/D .

Criterio per identificare regime puramente scabro

La legge di tubo scabro è la seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{1}{3.71} \cdot \frac{d}{D} \right)$$

Sappiamo che vale per $Re^* > 70$.

Esplicitando $Re^* = \frac{dv^*}{\nu}$

$$J = \lambda \frac{V^2}{2gD} \quad \text{da cui:}$$

$$\lambda = \frac{2gDJ}{V^2} = \frac{2gD}{V^2} \frac{4\tau_0}{\rho g D} = 8 \frac{\tau_0}{\rho V^2}$$

$$\text{E quindi } v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

Otteniamo:

$$Re^* = \frac{dv^*}{\nu} = \frac{d}{D} \frac{VD}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \frac{d}{D} Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 70$$

da cui

$$Re \sqrt{\lambda} \frac{d}{D} = 70 \sqrt{8} \cong 200$$

Quindi abbiamo condizioni di tubo scabro per

$$Re \geq 200 \frac{D}{d} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Ovvero per

$$Re \geq \frac{400}{d/D} \log \left(\frac{3.71}{d/D} \right)$$

Abaco di Moody: zone di transizione (1)

Nel diagramma degli esperimenti di Nikuradse si osserva un rapido aumento del coefficiente di resistenza subito dopo il regime laminare. Questo non si osserva nel diagramma di Moody relativo a tubi commerciali con scabrezza non uniforme: perché?

Risposta: Gli esperimenti di Nikuradse sono stati eseguiti con valori costanti del diametro dei grani di sabbia, quindi, al crescere di Re , la scabrezza emerge fuori dalla zona viscosa uniformemente, provocando un repentino aumento della resistenza.

Nei tubi commerciali la scabrezza non è uniforme e quindi, all'aumentare di Re , essa emerge gradatamente dalla zona viscosa producendo una transizione graduale.

Abaco di Moody: zone di transizione (2)

La regione di turbolenza inerziale (completamente sviluppata), nella quale λ è indipendente da Re è delimitata da una curva discendente caratterizzata da $Re^* = r u^* / \nu = 70$. Perché?

Risposta: $Re^* = 70$ identifica una altezza di asperità completamente immersa nella parte inerziale dello strato limite, dove gli effetti viscosi sono trascurabili. Quindi al di là di questo valore, gli effetti viscosi sono trascurabili e quindi l'indice di resistenza è indipendente da Re

La curva è discendente perché con l'aumentare di Re , la parte inerziale diventa più importante e la parte viscosa sempre più sottile. Quindi una asperità geometrica che è completamente immersa nel sottostrato viscoso ad un valore di Re tende ad emergere nella parte inerziale a valori più elevati di Re .

Formule pratiche

La formula di Colebrook è implicita e richiede iterazioni

La formula di Cozzo approssima bene quella di Colebrook ed ha il vantaggio di non essere iterativa:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{5.8}{\text{Re}^{0.9}} + \frac{\varepsilon}{3.71D} \right)$$

$$J = \frac{V^2}{C^2 R_i}$$

In applicazioni pratiche tradizionali la turbolenza è completamente sviluppata e le pareti sono scabre. Formula di Chézy:

$$C = \sqrt{8g/\lambda}$$

Nota: il coefficiente di Chezy è dimensionale!

Esiste un grande numero di formule per la valutazione del coefficiente di Chezy.

Nessuna tiene conto di Re, quindi sono tutte valide in regime di parete scabra .

Tra quelle disponibili, consideriamo quella più utilizzata, essendo una formula monomia di facile utilizzo:

FORMULA DI GAUCKLER-STRICKLER

$$C = c R_i^{1/6}$$

$c(\text{m}^{1/3}/\text{s})=140$ per acciaio zincato e 70-60 per gallerie in cemento

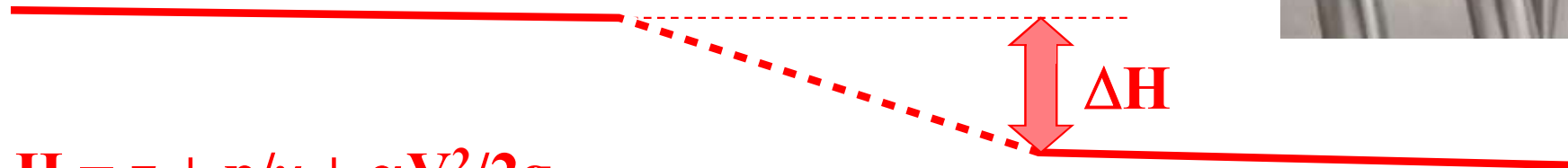
Perdite di carico Localizzate

Cambiamenti di geometria
(valvole, giunti, curve)

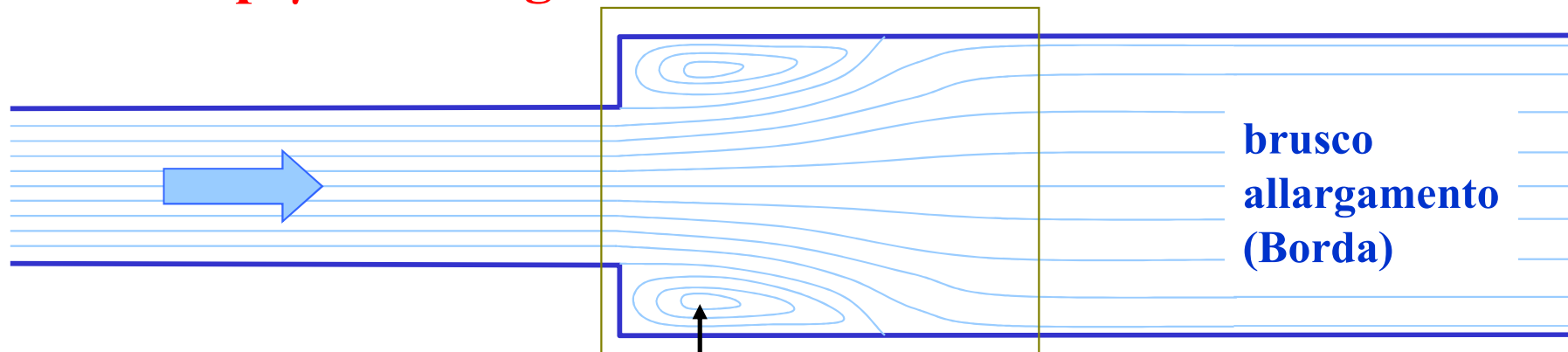
Possono essere molto importanti
nella regolazione della portata!



LCT



$$H = z + p/\gamma + \alpha V^2/2g$$



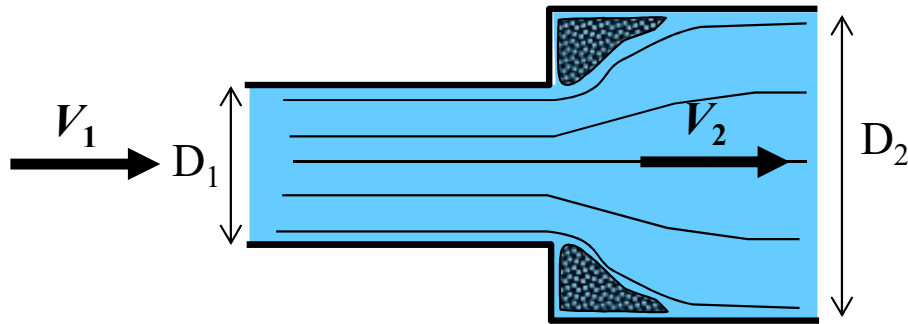
brusco
allargamento
(Borda)

Mescolamento turbolento e
dissipazione localizzata di energia

Perdite di carico Localizzate

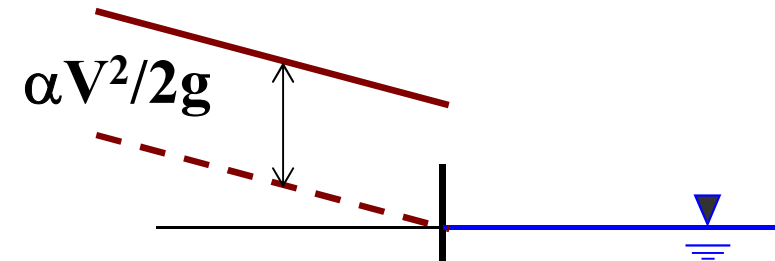
$$\Delta H_{loc} = n \frac{V^2}{2g} \text{ dove } n \text{ dipende dalla geometria}$$

brusco allargamento



$$\Delta H_{loc} = \frac{1}{2g} (V_1 - V_2)^2$$

Formula di Borda



Sbocco in un serbatoio

$$\Delta H_{loc} = \alpha \frac{V^2}{2g}$$

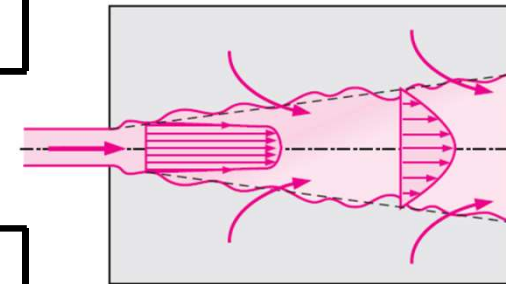
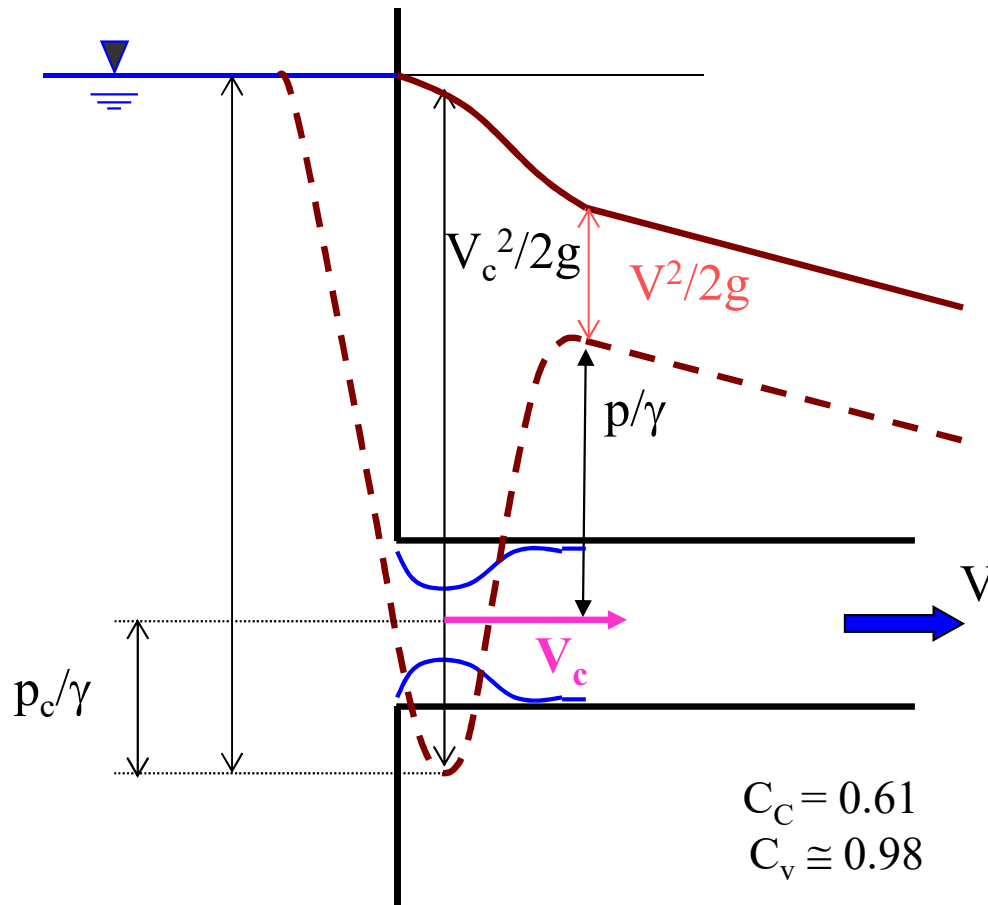


Figura 8.40

Allo sbocco in un serbatoio la corrente decelera e mescolandosi con il fluido circostante perde l'intera altezza cinetica (che si converte in calore).

da
Meccanica dei fluidi
Yunus A. Çengel, John M. Cimbala

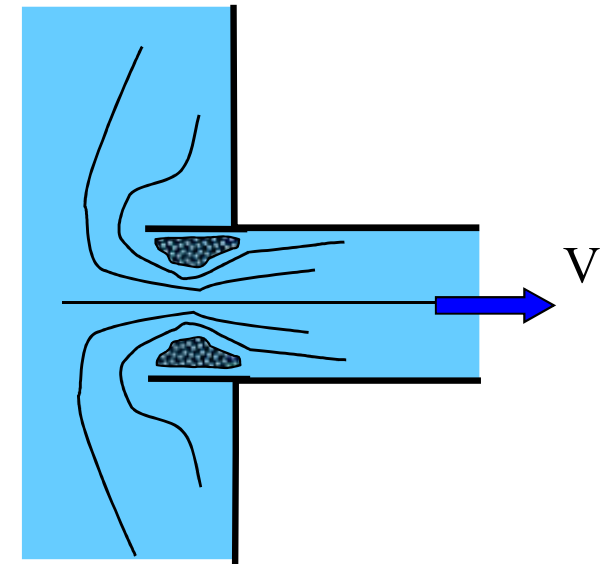
Perdite di carico Localizzate



Imbocco da serbatoio

$$\Delta H_{loc} = 0.5 \frac{V^2}{2g}$$

Imbocco da tubo aggiuntivo interno



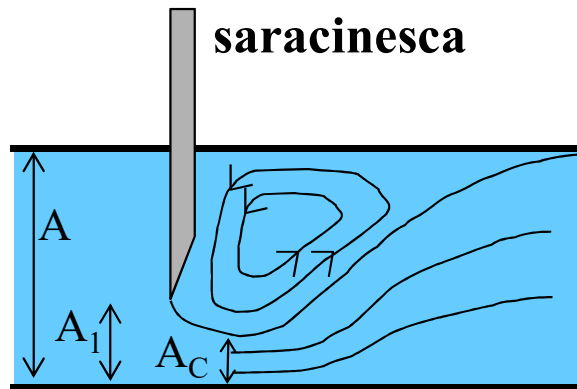
$$C_C = 0.50$$

$$C_v \cong 0.98$$

$$\Delta H = 1.16 \frac{V^2}{2g}$$

Perdite di carico Localizzate

$$\Delta H_{loc} = n \frac{V^2}{2g} \quad \text{dove } n \text{ dipende dalla geometria}$$

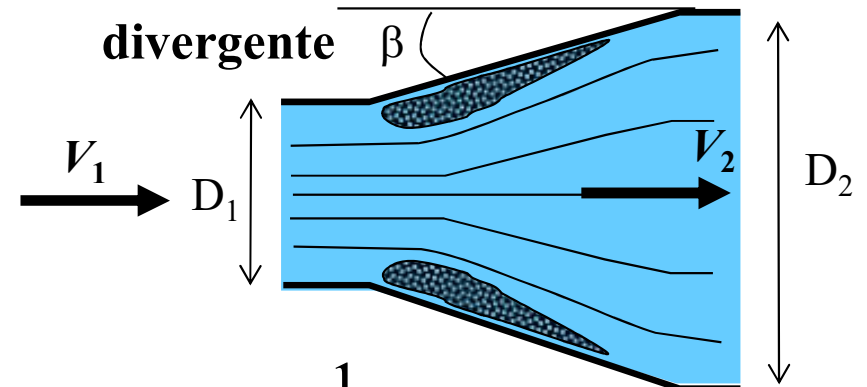


$$\Delta H = \frac{1}{2g} (V_c - V)^2$$

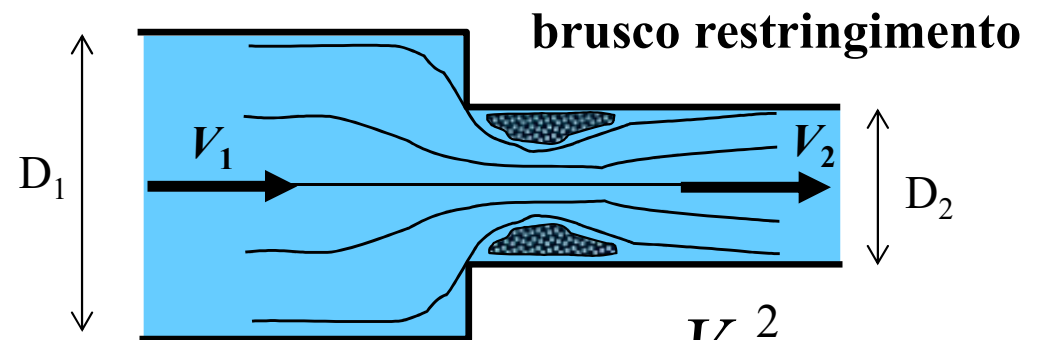
$$\Delta H = \frac{V^2}{2g} \left(\frac{1}{m C_c} - 1 \right)^2$$

con $m = \frac{A_1}{A}$

e $C_c = \text{coeff. di contrazione}$



$$\Delta H_{loc} = m(\beta) \frac{1}{2g} (V_1 - V_2)^2$$



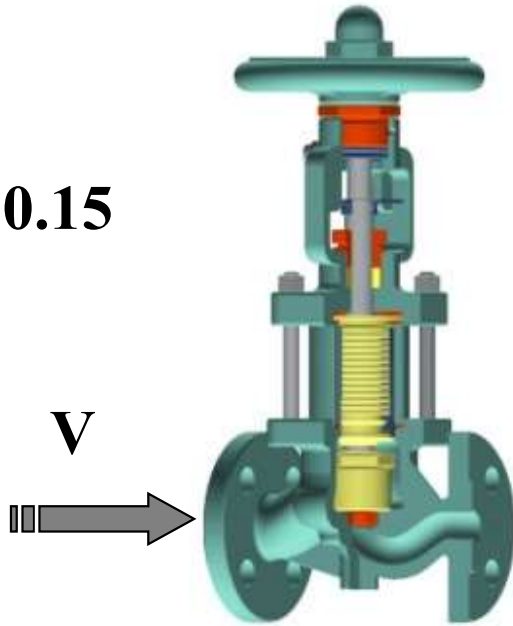
$$\Delta H_{loc} = n \frac{V_2^2}{2g}$$

con $n = 0.5$ per $D_1 > 2 D_2$
 $n < 0.5$ per $D_1 < 2 D_2$

Perdite di carico Localizzate

Saracinesche completamente aperte

$$n = 0.15$$



Curve: $n < 0.6$

$n = f(\text{curvatura, diametro tubo, regime moto})$

Allargamenti con raccordo conico: $n < 0.75$

$n = f(\text{rapporto di allargamento})$

Confluenze: $0.5 < n < 2.0$

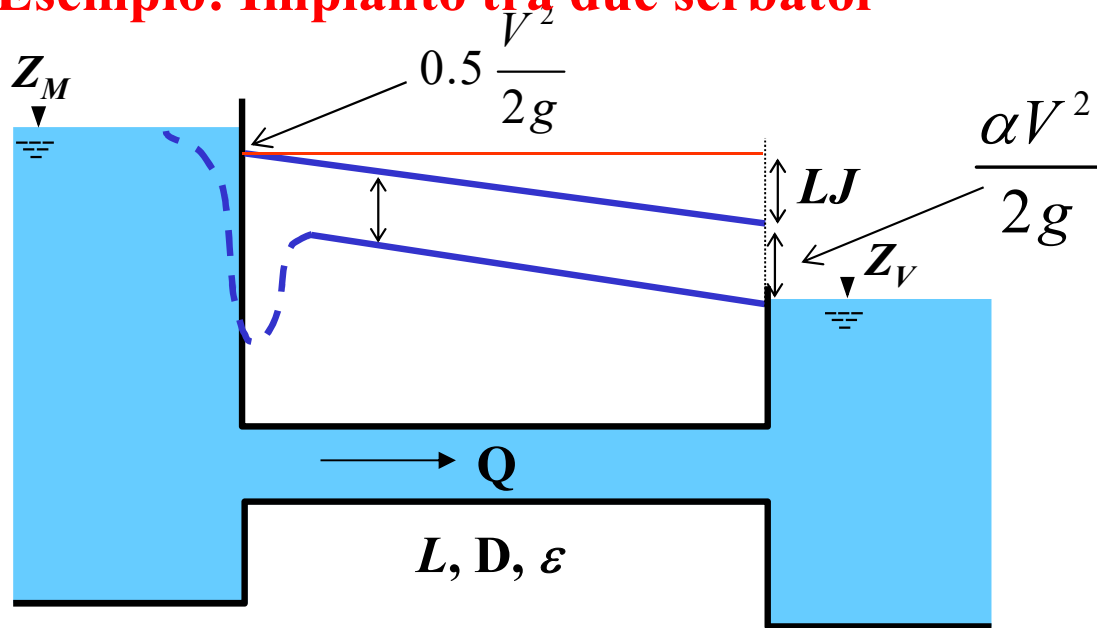
$n = f(\text{forma confluenza, divisione portate})$



Esempio: Impianto tra due serbatoi

Noti: $Z_M, Q, g, L, D, \varepsilon, \rho, \mu$

Det.: il livello Z_V del serbatoio di valle



Modello 1-D tra i due serbatoi:

$$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5 \frac{Q^2}{2gA^2} + JL + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \\ J = \lambda \frac{V^2}{2gD} = \lambda \frac{Q^2}{2gDA^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5 \frac{Q^2}{2gA^2} + \lambda \frac{Q^2}{2gDA^2} L + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \\ \lambda = \lambda \left(Re; \frac{r}{D} \right) \end{cases} \quad \text{funzione da definire in funzione del regime di movimento}$$

Noti: $\frac{r}{D}$ e $Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu}$

con l'abaco di Moody definisco il regime di Moto e quindi la **legge di resistenza** da utilizzare

moto laminare $\lambda = \frac{64}{Re}$

moto turbolento di transizione $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{r}{D} \right)$

moto puramente turbolento $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{1}{3.71} \frac{r}{D} \right)$

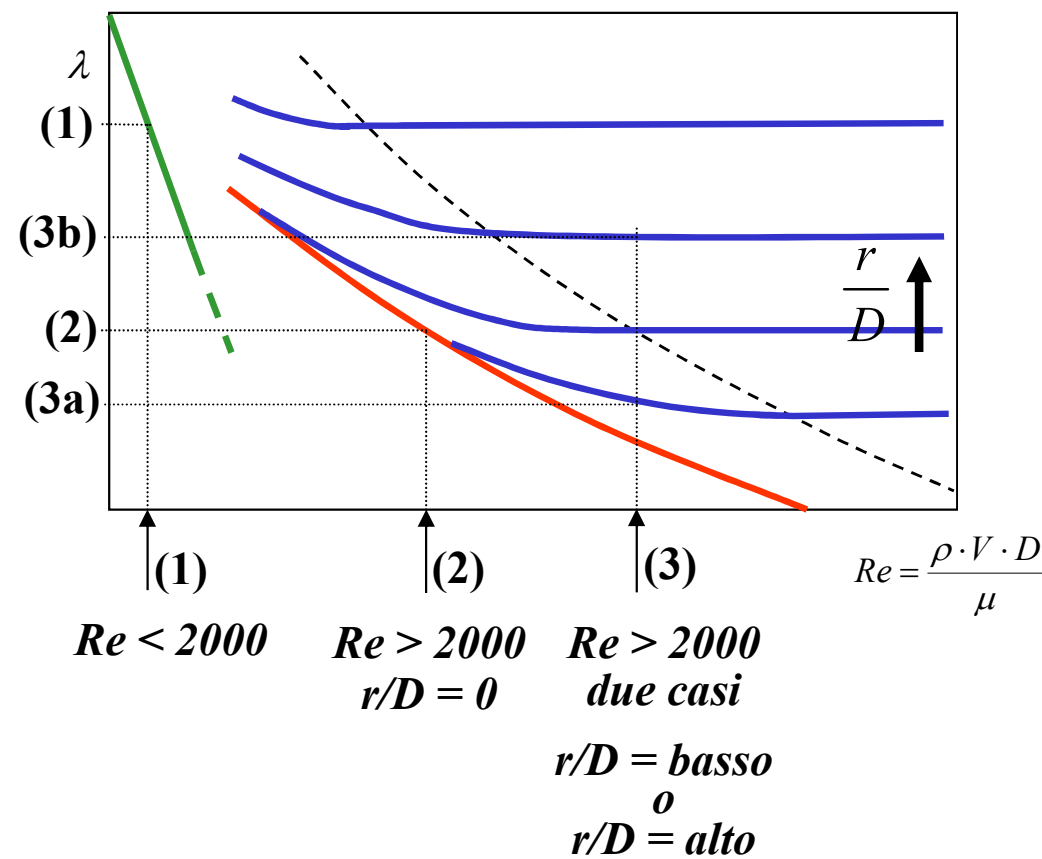
moto in tubi lisci $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \right)$

$$(1) \begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5 \frac{Q^2}{2gA^2} + \lambda \frac{Q^2}{2gDA^2} L + \frac{2Q^2}{2gA^2} \\ \lambda = \frac{64}{\text{Re}} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5 \frac{Q^2}{2gA^2} + \lambda \frac{Q^2}{2gDA^2} L + \frac{Q^2}{2gA^2} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}}\right) \end{cases}$$

$$(3a) \begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5 \frac{Q^2}{2gA^2} + \lambda \frac{Q^2}{2gDA^2} L + \frac{Q^2}{2gA^2} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{r}{D}\right) \end{cases}$$

$$(3b) \begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5 \frac{Q^2}{2gA^2} + \lambda \frac{Q^2}{2gDA^2} L + \frac{Q^2}{2gA^2} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{1}{3.71} \frac{r}{D}\right) \end{cases}$$

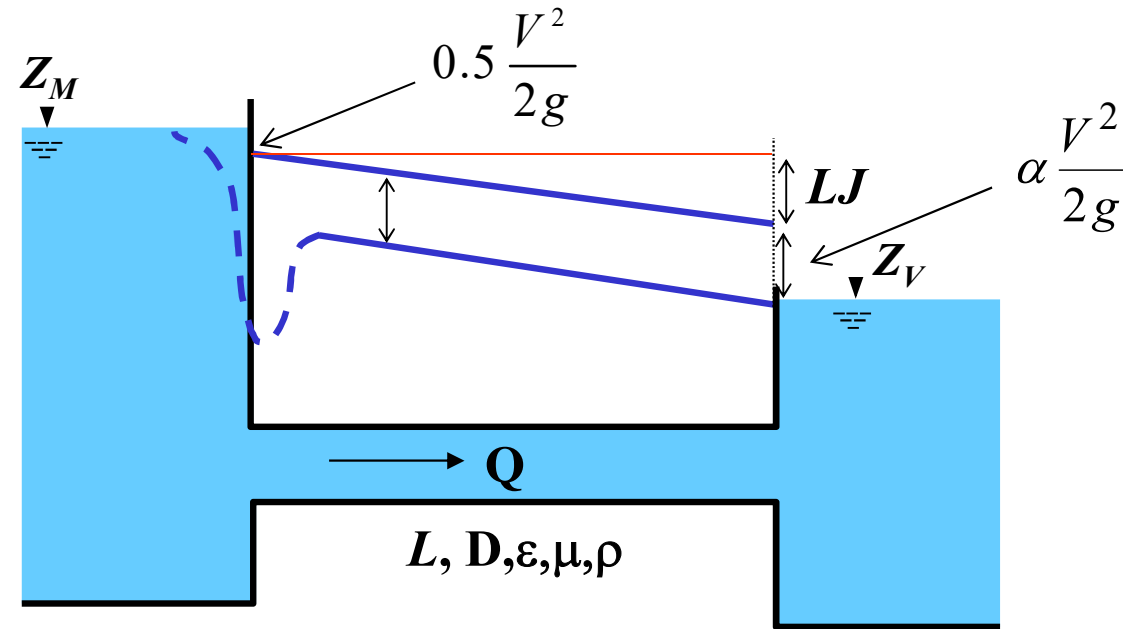


Sistemi di due equazioni in due incognite Z_V e λ ;

Attenzione che nei sistemi (2) e (3a) le leggi di resistenza sono implicite, quindi λ si può determinare solo con metodi iterativi !!!

Esempio 2: come il primo ma con incognita la portata Noti: $Z_M, Z_V, g, L, D, \varepsilon, \rho, \mu$

Det. La portata che transita nella condotta

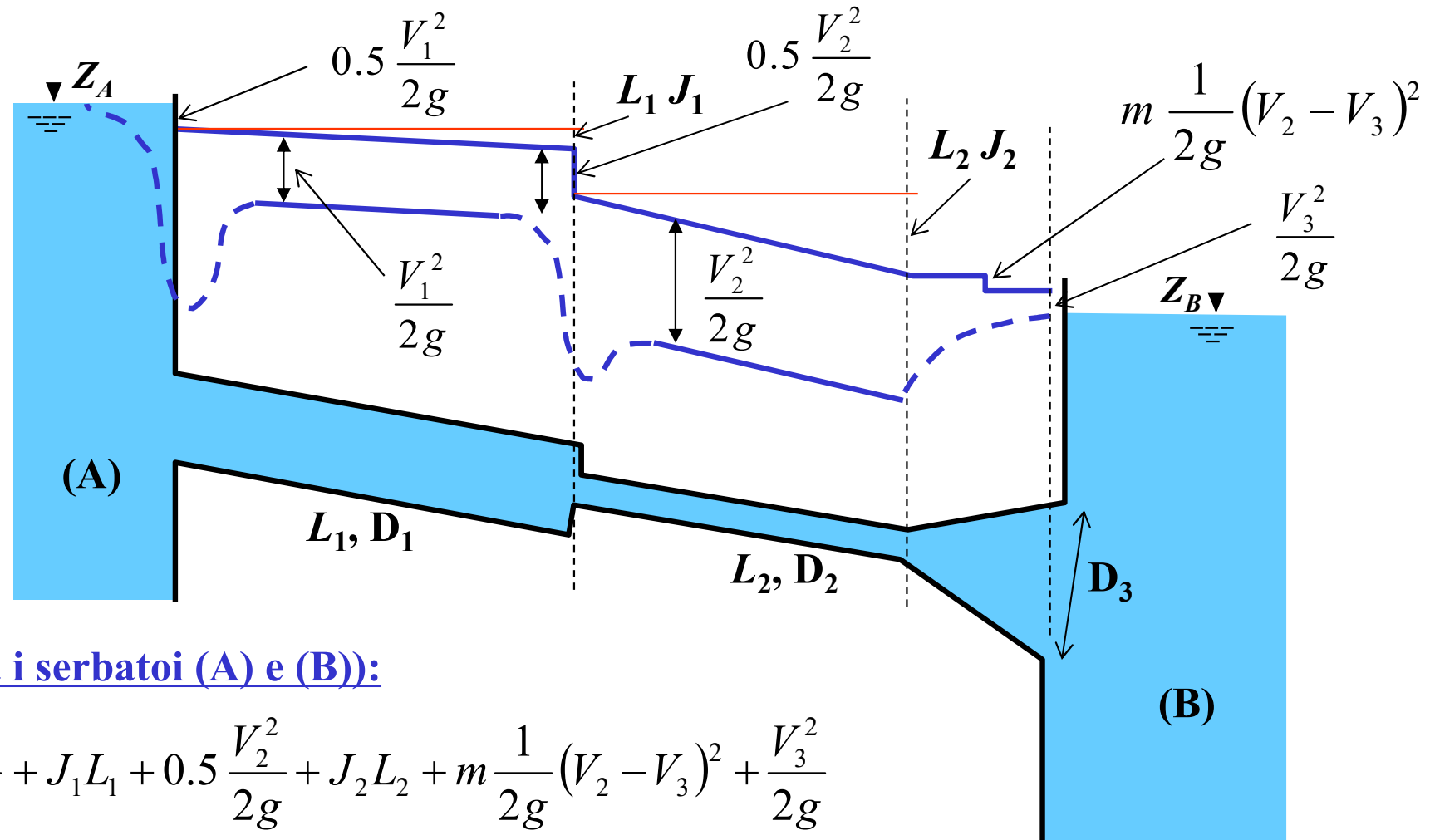


L'impostazione del problema è la stessa ma la soluzione del sistema è differente perché non conoscendo a priori la portata non conosco il regime di moto all'interno del tubo e quindi a priori non so quale legge di resistenza utilizzare.

$$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5 \frac{Q^2}{2gA^2} + \lambda \frac{Q^2 L}{2gDA^2} + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \\ \lambda = \lambda \left(Re; \frac{r}{D} \right) \end{cases} ?$$

in questi casi una soluzione è quella di ipotizzare il regime di movimento, quindi la legge di resistenza; trovare un risultato e verificare che il risultato trovato rispetti l'ipotesi fatta. Se l'ipotesi è verificata $\Rightarrow$ il risultato è corretto; se l'ipotesi non è verificata $\Rightarrow$ devo modificarla e quindi cambiare legge di resistenza.

Tracciamento delle linee dei Carichi Totali e Pieziometrica



Eq. 1-D (condotto tra i serbatoi (A) e (B)):

$$Z_A - Z_B = 0.5 \frac{V_1^2}{2g} + J_1 L_1 + 0.5 \frac{V_2^2}{2g} + J_2 L_2 + m \frac{1}{2g} (V_2 - V_3)^2 + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$Z_A - Z_B = 0.5 \frac{Q^2}{2g A_1^2} + J_1 L_1 + 0.5 \frac{Q^2}{2g A_2^2} + J_2 L_2 + m \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right)^2 + \frac{Q^2}{2g A_3^2}$$

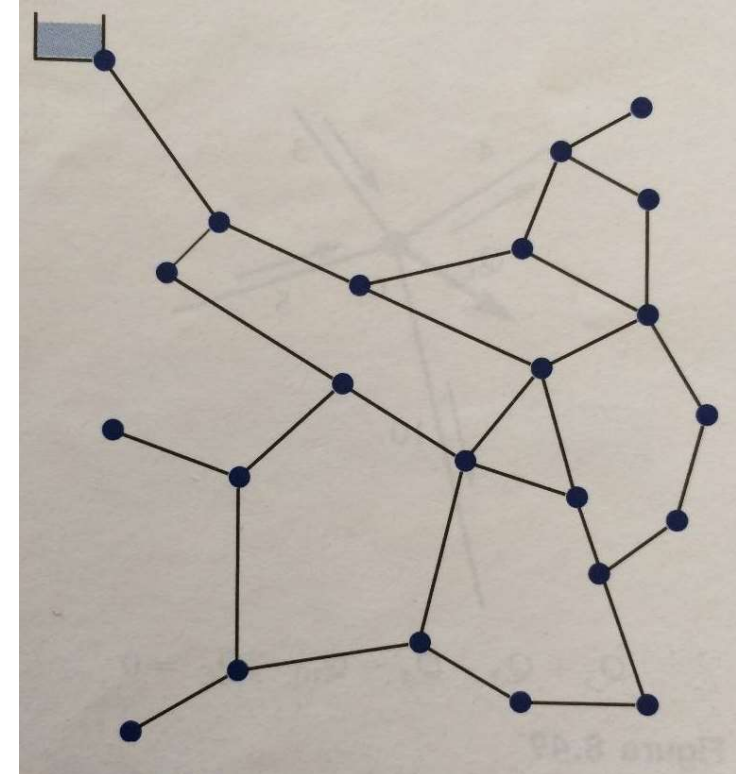
esprimendo J_1 e J_2 in funzione di Q

Reti di distribuzione

In impianti civili e industriali i fluidi sono trasportati lungo reti, che devono essere in grado di rispondere alle esigenze degli utilizzatori sotto differenti condizioni di esercizio.

Una rete può essere schematizzata in:

- Nodi dove si ha una variazione delle caratteristiche idrauliche o geometriche di una corrente
 - Confluenze di più tratti
 - Immissioni o erogazioni
 - Variazione di diametro o scabrezza
- Lato, tratto di tubazione tra due nodi
- Maglia, un insieme di lati che partendo da un nodo torna a chiudersi sul nodo di partenza



Calcolo di verifica di una rete input/output

Obiettivo: controllare che la rete sia in grado di erogare le portate previste con valori di pressione ad ogni nodo non inferiore ad un valore prefissato (generalmente $200 \text{ kPa} = 20 \text{ m}$ in colonna d'acqua)

Grandezze note:

- Per ogni nodo j si conoscono
 - portata Q_j (positiva se in arrivo)
 - Quota geodetica z_j
- Per ogni lato i si conoscono
 - Lunghezza L_i
 - Diametro D_i
 - Scabrezza ε_i

Da determinare il carico H_j ai nodi

Calcolo di verifica di una rete: principi

1) Conservazione della Massa su tutti i nodi j . Ciò implica che la somma delle portate in arrivo sia pari alla somma delle portate in uscita dai nodi:

$$\sum_i Q_i + Q_j = 0$$

Essendo 'i' i lati che confluiscono nel nodo j

2) La perdita di carico tra due nodi deve essere la stessa per tutti i possibili percorsi tra i due nodi:

$$H_j - H_{j+1} = J_i L_i \mp \Delta H_i$$

dove ΔH_i rappresenta una prevalenza o una riduzione di carico dovuto alla presenza di una macchina idraulica posta sulla linea 'i'. Si può esprimere la perdita di carico in funzione della portata:

$$H_j - H_{j+1} \pm \Delta H_i = \frac{8 L_i}{g \pi^2 D_i^5} \lambda_i Q_i^2 = \beta_i \lambda_i Q_i^2$$

Calcolo di verifica di una rete: sistema di equazioni

$$\sum_i Q_i + Q_j = 0$$

$$\sum dH_i = \sum \beta_i \lambda_i Q_i^2$$

La sommatoria è estesa a tutti i lati della maglia.

Assegnato un verso di percorrenza delle portate, si attribuisce il segno positivo alle perdite di carico nei tratti nei quali la portata si muove nel senso prefissato, e negativo nel caso contrario.

Nei calcoli si assume che il moto turbolento sia in regime scabro e quindi si usano formule monomie, per esempio la formula di Chezy con coefficiente di Strickler:

$$H_j - H_{j+1} \pm \Delta H_i = \frac{10.3 L_i}{c^2 D_i^{5.33}} Q_i^2 = K_i Q_i^2$$

Per problemi di progetto, i gradi di libertà sono generalmente superiori alle equazioni disponibili e quindi intervengono fattori di tipo economico per l'ottimizzazione della rete idrica

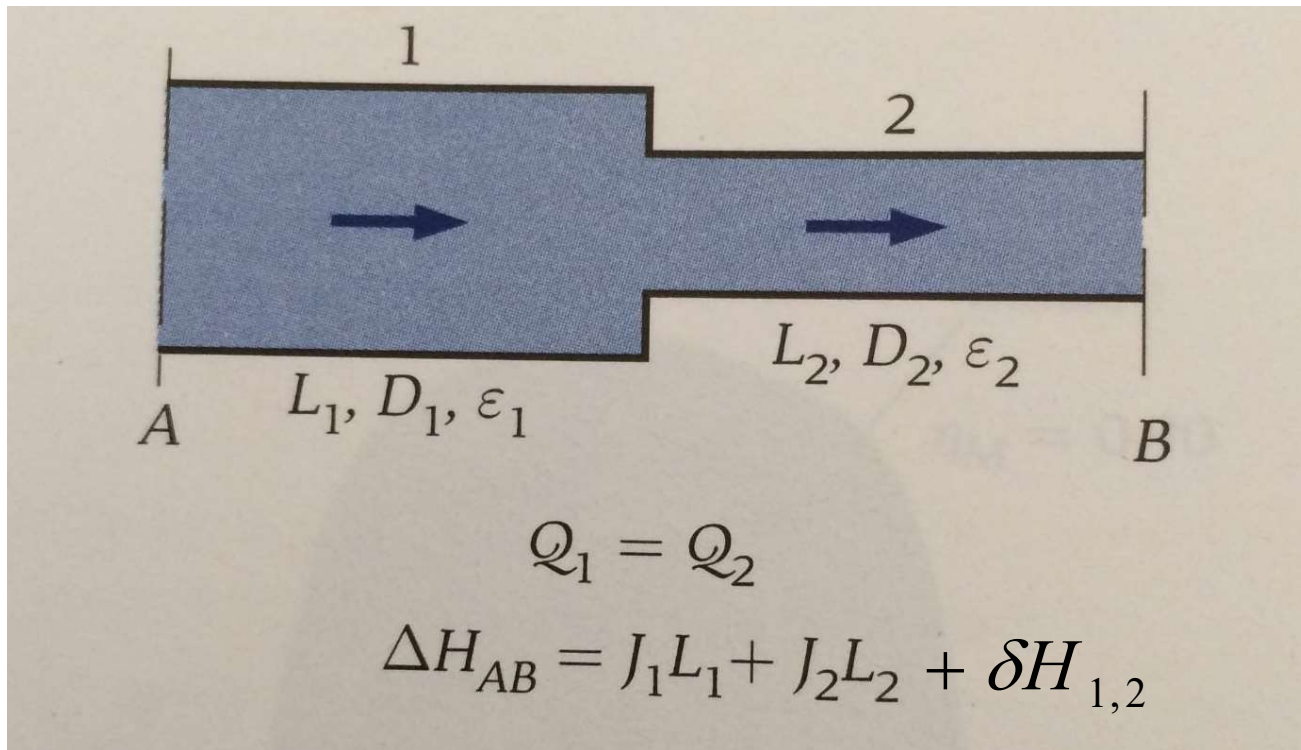
Condotte in serie

La portata è invariata per tutti i tratti della condotta

La perdita di carico è uguale alla somma delle perdite di carico nei singoli tratti

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

$$dH = J_1 L_1 + J_2 L_2 + \dots + J_n L_n + \delta H_{1,2} + \delta H_{2,3} + \dots + \delta H_{n-1,n}$$



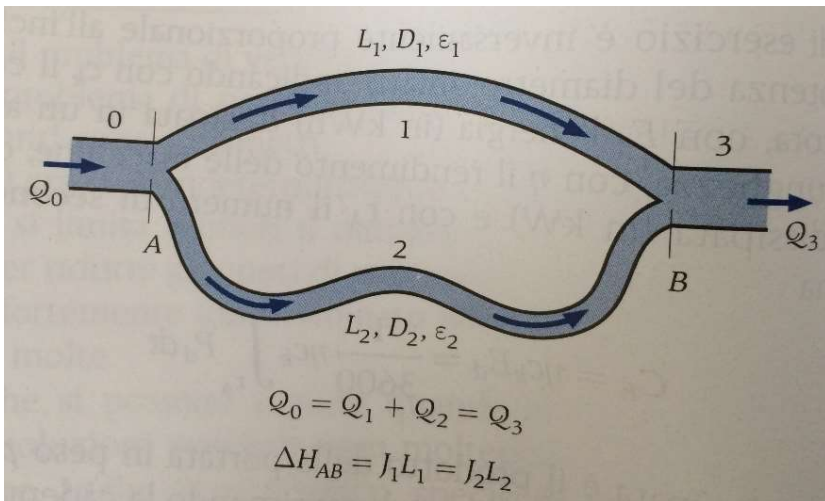
Condotte in parallelo

La perdita di carico non varia tra il nodo di monte e il nodo di valle:

$$dH_1 = dH_2 = \dots = dH_n \rightarrow \lambda_1 L_1 \frac{V_1^2}{2gD_1} = \lambda_2 L_2 \frac{V_2^2}{2gD_2} = \dots = \lambda_n L_n \frac{V_n^2}{2gD_n}$$

Le portate nei singoli tratti si accomodano in modo da mantenere invariato il carico tra i due nodi:

Otengo n-1 equazioni + l'equazione di equilibrio sul nodo, e n incognite Q_n :



$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{A_1 V_1}{A_2 V_2} = \sqrt{\frac{\lambda_2 L_2 D_1^5}{\lambda_1 L_1 D_2^5}} \quad \frac{Q_1}{Q_n} = \frac{A_1 V_1}{A_n V_n} = \sqrt{\frac{\lambda_n L_n D_1^5}{\lambda_1 L_1 D_n^5}}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

La soluzione è la seguente:
(Qui scritta per Q_1 ma valida
per tutti gli altri tratti)

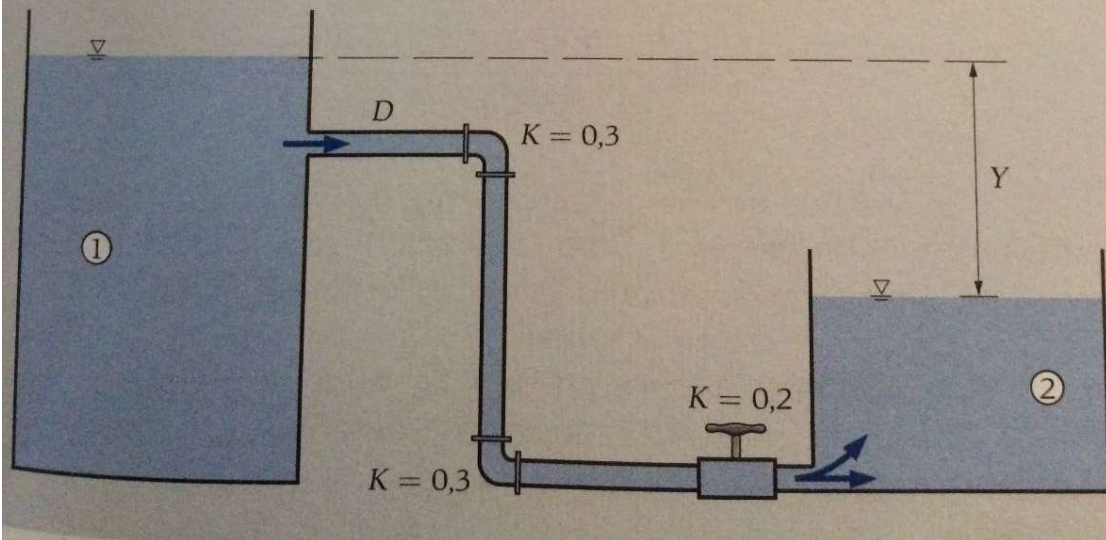
$$Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{\frac{\lambda_1 L_1}{D_1^5} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{D_i^5}{\lambda_i L_i}}}}$$

ESEMPIO 8.7 Impianto a gravità

Due serbatoi contenenti acqua alla temperatura di 10°C sono collegati da una tubazione in ghisa di diametro $D = 50\text{ mm}$ (Figura 8.58). Calcolare il dislivello Y esistente fra le loro superfici libere quando nella tubazione, lunga $L = 89\text{ m}$, defluisce una portata $Q = 6\text{ l/s}$.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido incomprimibile. 2 Le quote dei peli liberi dei serbatoi si mantengono costanti.

Proprietà La densità e la viscosità dinamica dell'acqua a 10°C sono, rispettivamente, $\rho = 999,7\text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1,307 \times 10^{-3}\text{ Pa} \cdot \text{s}$. La scabrezza della tubazione in ghisa è $\varepsilon = 0,00026\text{ m}$.



Analisi La tubazione comprende un imbocco a spigolo vivo ($K = 0,5$), due gomiti standard flangiati ($K = 0,3$ ciascuno), una saracinesca completamente aperta ($K = 0,2$) e uno sbocco ($K = 1,06$) che complessivamente danno un coefficiente di perdita $K_T = 2,36$.

L'equazione dell'energia, scritta tra i punti 1 e 2 di liquido in quiete, rispettivamente, del serbatoio di alimentazione e di quello di scarico, fornisce

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \Delta H_d$$

essendo ΔH_d la somma delle perdite di carico continue e localizzate tra i due punti. Poiché $V = \text{costante}$, esprimendo la cadente con la 8.32 (formula di Darcy-Weisbach) e le perdite localizzate con la 8.85, si ha

$$\Delta H_d = \left(\lambda \frac{L}{D} + K_T \right) \frac{V^2}{2g}$$

Sostituendo nell'equazione dell'energia, essendo la differenza delle quote piezometriche tra i punti 1 e 2 pari al dislivello Y fra i peli liberi dei due serbatoi, si ha

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = Y = \left(\lambda \frac{L}{D} + K_T \right) \frac{V^2}{2g}$$

La velocità media V nella tubazione vale

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0,006}{\pi \times 0,05^2} = 3,06 \text{ m/s}$$

per cui il numero di Reynolds è

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{999,7 \times 3,06 \times 0,05}{1,307 \times 10^{-3}} = 117000$$

Essendo $Re > 4000$, il moto è turbolento. L'indice di resistenza è dato dalla formula di Colebrook 8.64

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= -2 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3,71} \frac{\varepsilon}{D} \right) = \\ &= -2 \log \left(\frac{2,51}{117000 \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3,71} \frac{0,00026}{0,05} \right) \end{aligned}$$

Il valore di λ si può ottenere direttamente dall'abaco di Moody oppure procedendo per successive sostituzioni con la formula ricorsiva 8.67. Così facendo, si ottengono nell'ordine i valori: 0,0307 - 0,0315 - 0,0315. Pertanto la soluzione è $\lambda = 0,0315$. In alternativa si può usare una formula approssimata. Per esempio, in questo caso, la 8.65 fornisce $\lambda = 0,0317$, valore che differisce dal precedente di appena lo 0,6%.

Sostituendo
nell'equazione del
moto si ha:

$$Y = \left(\lambda \frac{L}{D} + K_T \right) \frac{V^2}{2g} = 27,9 \text{ m}$$

ESEMPIO 8.8 Impianto di sollevamento con tubazioni in parallelo

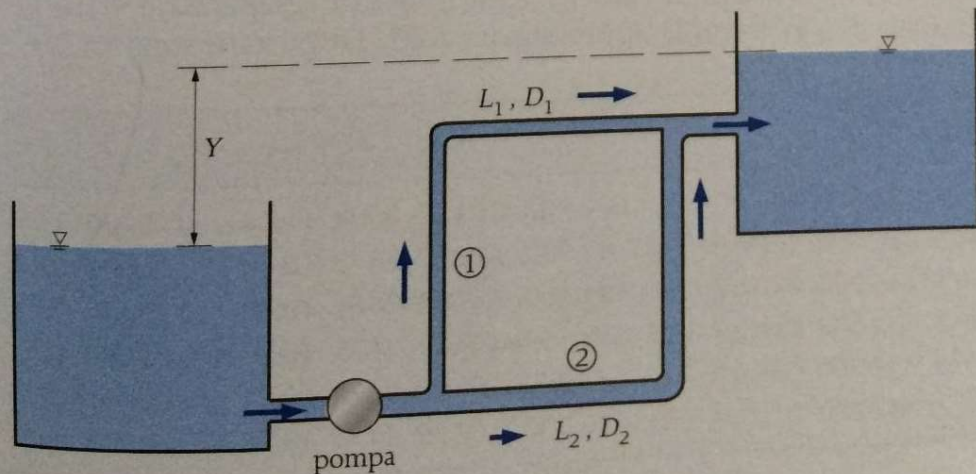
Un impianto di sollevamento convoglia acqua alla temperatura di 20 °C da un serbatoio a un altro, attraverso due tubazioni in acciaio, collegate in parallelo, di lunghezza $L = 100$ m e diametri $D_1 = 100$ mm e $D_2 = 150$ mm (Figura 8.59). Il dislivello tra le superfici libere dei due serbatoi è $Y = 8$ m. Nelle condizioni di funzionamento, il rendimento del gruppo pompa-motore è $\eta_{PM} = 0,70$ e la potenza assorbita è $P_E = 8$ kW. Calcolare la portata sollevata Q e le portate Q_1 e Q_2 in ciascuna delle tubazioni in parallelo.

Ipotesi 1. Il moto è permanente e il fluido incomprimibile. 2. Le perdite localizzate e quelle continue nei tratti che vanno dai nodi ai serbatoi si possono considerare trascurabili.

Proprietà La densità e la viscosità dinamica dell'acqua a 20 °C sono rispettivamente $\rho = 998$ kg/m³ e $\mu = 1,002 \times 10^{-3}$ Pa·s. La scabrezza delle tubazioni in acciaio è $\varepsilon = 0,045$ mm.

Analisi Per la 8.108 e la 8.109, rispettivamente, si ha

$$\Delta H_P = Y + \Delta H_d \quad \text{e} \quad Q \Delta H_P = \frac{\eta_{PM} P_E}{\rho g}$$



da cui, introducendo la prima nella seconda,

$$Q(Y + \Delta H_d) = \frac{\eta_{PM} P_E}{\rho g}$$

equazione nelle due incognite Q e ΔH_d .

Per l'ipotesi 2 la perdita di carico ΔH_d riguarda solo le tubazioni in parallelo, per cui, per la 8.95, si ha, per il lato 2

$$\Delta H_d = \frac{8\lambda_2 L}{g\pi^2 D_2^5} Q_2^2 = k_2 Q_2^2$$

Per la 8.104, la portata nel lato 1 è

$$Q_1 = Q_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 L_2}{\lambda_1 L_1} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^5} = k_1 Q_2$$

Inoltre, per la conservazione della massa, si ha

$$Q = Q_1 + Q_2 = k_1 Q_2 + Q_2 = Q_2(1 + k_1)$$

Introducendo la 4 e la 2 nella 1, questa diviene

$$Q_2(1 + k_1)(Y + k_2 Q_2^2) = \frac{\eta_{PM} P_E}{\rho g}$$

equazione di terzo grado nell'incognita Q_2 . In effetti, i coefficienti k_1 e k_2 sono funzione degli indici di resistenza λ_1 e λ_2 che, a loro volta, sono funzione attraverso il numero di Reynolds delle portate Q_1 e Q_2 . La 5 va dunque risolta con un metodo iterativo, in modo tale che il valore dei coefficienti possa essere via via corretto. Ponendo $a = k_2(1 + k_1)$, $c = Y(1 + k_1)$ e $d = \eta_{PM} P_E / (\rho g)$, la 5 diviene

$$F(Q_2) = aQ_2^3 + cQ_2 - d = 0$$

Utilizzando quale metodo iterativo il metodo di Newton, il valore dell'incognita all'iterazione $i + 1$ è dato dalla formula ricorsiva

$$Q_{2,i+1} = Q_{2,i} - \frac{F_i}{F'_i}$$

La tabella che segue riporta i valori delle varie grandezze nelle successive iterazioni. Il calcolo degli indici di resistenza è stato effettuato con la formula approssimata 8.65. Le portate sono in l/s.

Q_2	Re_2	λ_2	Q_1	Re_1	λ_1	a	c	F	F'
10,0	84 600	0,0200		200 000	0,0187	3004	11,01	-0,45900	11,9
48,5	410 600	0,0166	3,8	47 700	0,0227	2373	10,49	0,20800	27,3
40,9	345 900	0,0169	15,1	191 300	0,0188	2468	10,75	0,03650	23,3
39,3	332 600	0,0169	14,1	178 500	0,0189	2475	10,75	0,00100	22,3
39,3	332 200	0,0169	13,5	171 300	0,0190	2474	10,74	-0,00003	22,3
39,3	332 300	0,0169	13,5	170 800	0,0190	2474	10,74	-0,00003	22,3

Si può notare come il metodo, pur partendo da un valore iniziale dell'incognita abbastanza lontano dalla soluzione, converga abbastanza rapidamente. In definitiva, risulta

$$Q_2 = 39,3 \text{ l/s}$$

$$Q_1 = 13,5 \text{ l/s}$$

$$Q = 52,8 \text{ l/s}$$

Discussione Il rapporto fra i diametri delle tubazioni in parallelo 1 e 2 è pari a $2/3$. Il rapporto tra le portate risulta invece pari a $0,344$. Secondo la 8.104, se gli indici di resistenza fossero uguali, dovrebbe essere pari a $(D_1/D_2)^{5/2} = 0,363$.

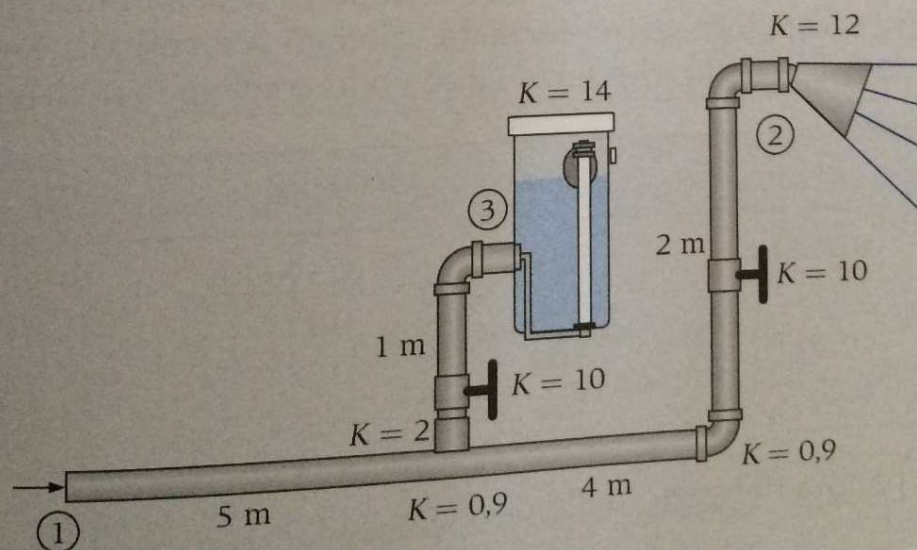
La rete di distribuzione idrica di un'abitazione è costituita da tubazioni in rame di diametro $D = 15 \text{ mm}$ (Figura 8.60). Nota la pressione relativa $p_1 = 200 \text{ kPa}$ nella sezione 1, calcolare (a) la portata Q di acqua fredda che alimenta il getto della doccia e (b) la portata Q_b che alimenta la doccia quando la vaschetta dello sciacquone è in fase di riempimento.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido incomprimibile. 2 L'altezza cinetica allo sbocco è trascurabile.

Proprietà La densità e la viscosità dinamica dell'acqua a 20°C sono rispettivamente $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1,002 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. La scabrezza delle tubazioni in rame è $\varepsilon = 1,5 \times 10^{-6} \text{ m}$. Curve, valvole e dispositivi di sbocco hanno i coefficienti di perdite di carico indicati in figura.

Analisi

(a) Il tratto di tubazione che va dalla sezione 1 alla doccia è lungo $L_1 = 11 \text{ m}$ e comprende un raccordo a T in linea saldato ($K = 0,9$), due curve saldate ($K = 0,9$ ciascuna), una valvola a globo completamente aperta ($K = 10$) e il diffusore della doccia ($K = 12$), che complessivamente danno un coefficiente di perdita $K_T = 24,7$.



L'equazione dell'energia tra la sezione 1 e la sezione 2 posta allo sbocco del diffusore della doccia, in cui la pressione relativa è nulla e l'altezza cinetica trascurabile, fornisce

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \Delta H_d$$

essendo ΔH_d la somma delle perdite di carico continue e localizzate tra le due sezioni. Per la 8.32 e la 8.85 ed essendo $V = \text{costante}$, si ha

$$\Delta H_d = \left(\lambda \frac{L}{D} + K_T \right) \frac{V^2}{2g}$$

Sostituendo nell'equazione dell'energia e ponendo $\alpha_1 = 1$, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - z_2 = \left(\lambda \frac{L}{D} + K_T - 1 \right) \frac{V^2}{2g}$$

equazione che associata alla formula di Colebrook 8.64, che esprime λ in funzione di V attraverso il numero di Reynolds, costituisce un sistema di due equazioni nelle incognite λ e V , che, risolto, fornisce la velocità V e quindi la portata Q .

Conviene risolvere il sistema per successive sostituzioni. Dall'equazione dell'energia si ha

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - z_2}{\lambda \frac{L}{D} + K_T - 1} = \frac{\frac{200000}{998 \times 9,81} - 2}{\lambda \frac{11}{0,015} + 24,7 - 1} = \frac{18,4}{733\lambda + 23,7}$$

da cui

$$V = \sqrt{2g \frac{18,4}{733\lambda + 23,7}} = \sqrt{\frac{362}{733\lambda + 23,7}}$$

Assumendo come primo valore di λ quello relativo al moto puramente turbolento e sostituendo nella precedente si ha un primo valore di V , che, a sua volta, introdotto nella formula approssimata 8.65, fornisce un secondo valore di λ e così via. Come si vede dalla tabella che segue, il metodo converge rapidamente.

λ	V (m/s)	Q (l/s)	Re
0,0120	3,34	0,590	49 900
0,0212	3,04	0,536	45 400
0,0217	3,02	0,534	45 200
0,0217	3,02	0,534	45 200

La portata del getto della doccia è quindi $Q = 0,53$ l/s.

Nella fase di riempimento della vaschetta, l'acqua si muove in parallelo nei due tratti a valle del raccordo a T. Si indichino col pedice a le grandezze relative al tratto a monte del raccordo a T, col pedice b quelle del tratto che alimenta la doccia e col pedice c quelle del tratto che alimenta la vaschetta. Il tratto a ha lunghezza $L_a = 5$ m. Il tratto b ha lunghezza $L_b = 6$ m e comprende un raccordo a T ($K = 0,9$), due curve saldate ($K = 0,9$ ciascuna), una valvola a sfera completamente aperta ($K = 10$) e il diffusore della doccia ($K = 12$), che complessivamente danno un coefficiente di perdita $K_b = 24,7$. Il tratto c è lungo $L_c = 1$ m e comprende una derivazione a T saldata ($K = 2$), un gomito ($K = 0,9$), una valvola a globo completamente aperta ($K = 10$) e il galleggiante ($K = 14$), che complessivamente danno un coefficiente di perdita $K_c = 26,9$.

Il problema è retto dalle equazioni dell'energia, scritte rispettivamente tra le sezioni 1 e 2 e tra la sezione 1 e la sezione 3 posta allo sbocco nella vaschetta, e dall'equazione di conservazione della massa. Si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \lambda_a \frac{L_a}{D} \frac{V_a^2}{2g} + \left(\lambda_b \frac{L_b}{D} + K_b \right) \frac{V_b^2}{2g}$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_3 + \lambda_a \frac{L_a}{D} \frac{V_a^2}{2g} + \left(\lambda_c \frac{L_c}{D} + K_c \right) \frac{V_c^2}{2g}$$

$$Q_a = Q_b + Q_c$$

Se il moto fosse puramente turbolento, essendo in tal caso l'indice di resistenza indipendente dalla velocità, queste equazioni costituirebbero un sistema di tre equazioni nelle incognite V_a , V_b e V_c (essendo $V_1 = V_a$). In generale, invece, alle tre equazioni bisogna associare la formula di Colebrook scritta per i tre tratti.

In ogni caso, il sistema è non lineare e va risolto, come nel caso precedente, per successive approssimazioni. In particolare, assegnato un valore iniziale a V_a (per esempio doppio di quello calcolato al punto precedente) e il valore di moto puramente turbolento agli indici di resistenza λ_b e λ_c , si può ricavare V_b dalla prima, V_c dalla seconda e un nuovo valore di V_a dalla terza e così via, ricalcolando a ogni iterazione il valore degli indici di resistenza con la formula approssimata 8.65. Anche in questo caso, come si vede dalla tabella che segue, il metodo converge abbastanza rapidamente.

V_b	λ_b	V_c	λ_c	V_a	λ_a
	0,0120		0,0120	6,00	0,0189
2,41	0,0228	2,62	0,0224	5,03	0,0195
2,56	0,0225	2,92	0,0219	5,48	0,0192
2,43	0,0227	2,78	0,0221	5,21	0,0194
2,51	0,0226	2,86	0,0219	5,38	0,0193
2,46	0,0227	2,81	0,0220	5,28	0,0193
2,49	0,0226	2,84	0,0220	5,34	0,0193
2,48	0,0226	2,83	0,0220	5,30	0,0193

Si osservi che il riempimento dello sciacquone fa sì che la portata di acqua fredda diminuisca del 17%, da 0.53 a 0,44 l/s rendendo il getto della doccia più caldo