Lezione 26 - 13/11/2025

Serie a termini di segno qualunque

def. sia $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ (o anche in $\mathbb{C}$)
se la serie $\sum_n |a_n|$ è convergente ($\sum_n |a_n|$ è a t.n.n.)
la serie $\sum_n a_n$ si dice assolutamente convergente

¿ se $\sum_n a_n$ è assolutamente convergente allora $\sum_n a_n$ è anche convergente?

SI

Teorema sia $\sum_n a_n$ una serie (qualunque)
se è assolutamente convergente allora è convergente.

dim. $\sum_n a_n$ è ass. convergente

$\Downarrow \leftarrow$ def.

$\sum_n |a_n|$ è convergente

$\Updownarrow \leftarrow$ Criterio di Cauchy

per la serie $\sum_n |a_n|$ vale il Criterio di Cauchy

cioè $\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n}: \forall n, k \quad n>\bar{n}, k>0 \Rightarrow \big| |a_n|+|a_{n+1}|+\dots+|a_{n+k}| \big| < \varepsilon$

$\Downarrow \leftarrow$ triangolare

si ha $|a_n+\dots+a_{n+k}| \le \underbrace{|a_n|}_{\ge 0}+\dots+\underbrace{|a_{n+k}|}_{\ge 0} = \big| |a_n|+\dots+|a_{n+k}| \big| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n}: \forall n, k \quad n>\bar{n} \wedge k>0 \Rightarrow |a_n+\dots+a_{n+k}|<\varepsilon$

↑ questa è la condizione di Cauchy per $\sum_n a_n$

$\Downarrow \leftarrow$ criterio di Cauchy

$\sum_n a_n$ è convergente.

CVD

oss. cosa faccio quando studio una serie qualunque. $\sum_n a_n$

1) vedo se $\lim_n a_n = 0$
se non vale $\lim_n a_n = 0$
la serie non è convergente.

2) se invece $\lim_n a_n = 0$
studio $\sum_n |a_n|$ ↖ questa è a t.n.n.

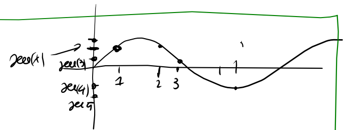
↑ a questa serie cerco di applicare i criteri per le serie a termini non negativi
(- confronto
- confronto asintotico
- radice o rapporto
- serie condensata)

se $\sum_n |a_n|$ è conv. $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ è conv.

Resta la domanda

¿ se $\sum_n |a_n|$ è divergente la $\sum_n a_n$ può essere convergente ?

$\sum_n \operatorname{sen}(n)$



$\lim_n \operatorname{sen}(n) =$ non esiste !

non è convergente

$\sum_n |\operatorname{sen}(n)|$

Esempio consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\dots$$

se la prendo col valore assoluto diventa

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ è divergente.

faccio vedere che $\sum_n (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ è convergente

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = \frac{1}{(2n-1)(2n)}$$

$$s_{2n} = \underbrace{1-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\dots+\frac{1}{(2n)(2n-1)}$$

$s_{2n}=\sigma_n$ $\qquad$ σ_n è la ridotta della serie $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)(2n-1)}}_{\text{converge}}$

$\left(\sum \frac{1}{n^2} \right.$ converge $\qquad \left. \lim_n \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(2n)(2n-1)}} = 4 \right)$ $\quad \frac{1}{4n^2}$

significa $\lim_n \sigma_n = \bar{\sigma} \in \mathbb{R}$!!!

ma $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, $\quad s_{2n} \xrightarrow{n} \bar{\sigma}$, $\quad \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n} 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim s_{2n+1} = \bar{\sigma} \\ \lim_n s_{2n} = \bar{\sigma} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\lim_n s_n = \bar{\sigma}$

la serie è conv.

Conclusione

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ è conv. $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|$ è div.

diremo che $\sum_n a_n$ è semplicemente convergente

Teorema (Criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alternato)

sia $(a_n)_n$ in $[0,+\infty[$

supponiamo

1) $\forall n, \quad a_{n+1} \le a_n$

2) $\lim_n a_n = 0$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$?

complicato.

dim. (cenno)

indico con s_n le ridotte della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \ldots\ldots$

considero

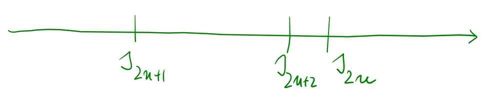
$s_{2n}, \; s_{2n+1}, \; s_{2n+2}, \; s_{2n+3}$

$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \implies \boxed{s_{2n+1} \le s_{2n}}$

$s_{2n+2} = s_{2n+1} + a_{2n+2} \implies \boxed{s_{2n+1} \le s_{2n+2}}$

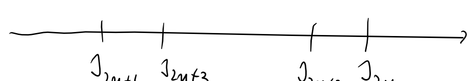
$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} - (\underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\ge 0})$

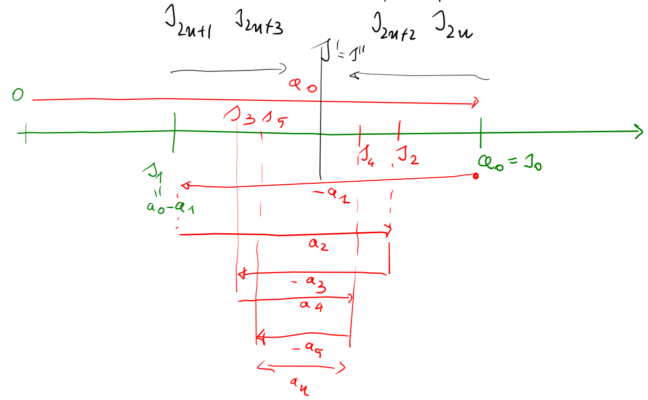
$\implies \boxed{s_{2n+2} \le s_{2n}}$



$s_{2n+3} = s_{2n+2} - a_{2n+3} \implies s_{2n+3} \le s_{2n+2}$

$s_{2n+3} = s_{2n+1} \underbrace{+ a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\ge 0} \implies s_{2n+3} \ge s_{2n+1}$





$\lim_n s_{2n} = s'$ (decrescente), $\quad \lim_n s_{2n+1} = s''$ (crescente)

con $s' \le s''$

ma $0 \le s' - s'' \le |a_n| \quad \forall n \implies s' = s''$

CVD

Esercizi

studiare il carattere di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot \lg(n!)}, \quad \sum_n \frac{n^n}{(n!)^2},$$

$$\sum_n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

$$\sum_n \operatorname{tg}\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$$

dire per quali valori di x è convergente

$$\sum_n \frac{x^{n^3}}{n!} \qquad \sum_n \frac{x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)}{n^x}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\lg n!)}$$

- è a termini positivi
- $\lim_n \frac{1}{n(\lg n!)} = 0 \overset{?}{\Rightarrow}$ convergente ? non ancora
-

$$\log n! = \lg(1\cdot 2\cdot 3\cdots(n)) \overset{!}{=} \lg 1+\lg 2+\dots+\lg n \overset{!}{=} \lg 2+\dots+\lg n \geq \underbrace{\lg 2+\lg 2+\dots+\lg 2}_{n-1}$$

$$\frac{1}{n \lg n!} \leq ?$$

$$n\lg(n!) \geq n(n-1)\cdot \lg 2$$

$$\frac{1}{n(\lg n!)} \leq \frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{\lg 2}$$

$\sum_n \frac{1}{n(n-1)}$ è conv

è conv!

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \rightarrow \text{criterio del rapporto,}$$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_n \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{((n+1)!)^2}}\cdot\frac{\cancel{(n!)^2}}{n^n} = \lim_n \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$(n+1)^2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\frac{1}{n+1} \to 0$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$

$= 0$

converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

0 sui dispari

± 1 sui pari,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & n=1 \\ -1 & n=2 \\ 0 & n=3 \\ 1 & n=4 \\ 0 & n=5 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(2n)\right)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(\pi n)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2n} \qquad \cos \pi n = (-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{2n}$$

a termini di segno alternato

$\operatorname{sen}\frac{1}{2n}$ è decrescente e va a 0

posso applicare Leibniz

Convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} tg\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$$

$$\lim_n tg\left(\frac{n}{1+n^3}\right) = 0$$

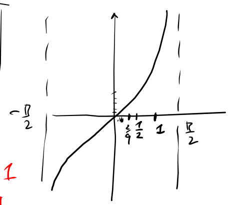
· è a.t.n.n ?

sì

$n=1 \quad \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad tg\left(\frac{1}{2}\right)$

$n=2 \quad \frac{2}{1+8} = \frac{2}{9} \quad tg\left(\frac{2}{9}\right)$

$$\boxed{\frac{n}{1+n^3} \le \frac{1}{2} \quad n \ge 1}$$



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{tg\,x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$\boxed{tg\,x \sim x \quad \text{per } x \text{ piccolo}}$

$$tg\left(\frac{n}{1+n^3}\right) \sim \frac{n}{1+n^3} \qquad \lim_n \frac{tg\left(\frac{n}{1+n^3}\right)}{\left(\frac{n}{1+n^3}\right)} = 1$$

$$\sum_n \frac{n}{1+n^3} \qquad \frac{n}{1+n^3} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2+\frac{1}{n}}$$

$\sim \sum_n \frac{1}{n^2}$ conv

$$\lim_n \frac{tg\left(\frac{n}{1+n^3}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 \quad \Rightarrow \text{il comp. è lo stesso di } \sum_n \frac{1}{n^2}.$$

per quali x (>0) è convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n^3}}{n!} \qquad \text{idea?}$$

applico il criterio del rapporto

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{x^{(n+1)^3}}{(n+1)!}}{\frac{x^{n^3}}{n!}}$$

$$= \lim_n \frac{x^{(n+1)^3}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^{n^3}}$$

$a>1$

$\frac{a^{k^2}}{k} \xrightarrow{k} +\infty$

$(n+1)^3 - n^3 =$

$\cancel{n^3}+3n^2+3n+1-\cancel{n^3}$

$$= \lim_n \frac{1}{n+1} \cdot x^{(n+1)^3 - n^3}$$

$$= \lim_n \frac{1}{n+1} \cdot x^{3n^2+3n+1} = \begin{cases} +\infty & x>1 \\ 0 & x \le 1 \end{cases}$$

la serie è divergente x $x>1$

" " convergente x $x \le 1$

Funzioni continue

sia $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

sia $x_0 \in E$ (x_0 è un punto del dominio)

def. diciamo che f è **continua** in x_0

se

1) x_0 è un punto isolato del dominio
   ($\exists r > 0 : \ ]x_0 - r, x_0 + r[\cap E = \{x_0\}$)

caso banale

2) x_0 è di accumulazione per E

   e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

caso interessante

si possono ottenere tutte e 2 le situazioni con una unica condizione

f è continua in x_0

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

def. se $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

f si dice **continua** se è continua in tutti i punti del dominio

Esempi.

1) $f(x)$ polinomio

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

è continua? sì

$\lim_{x \to x_0} \underbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}_{f(x)} = \underbrace{a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n}_{f(x_0)}$

2) $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ p, q polinomi

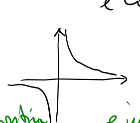
funzione razionale

$f : E \to \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$

$x_0 \in E$, $\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ anche questa è continua.

$x \longrightarrow \frac{1}{x}$



è continua. è in 0?