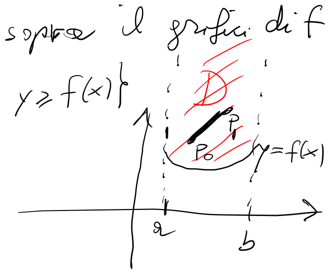
16 Novembre

Funzioni convesse

Teor Sia $f: I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo. Le seguenti proposizioni sono equivalenti

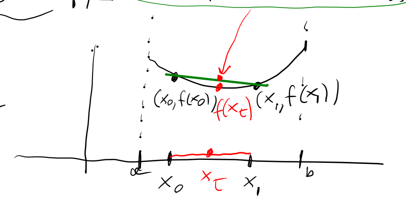
1) La regione del piano sopra il grafico di f cioè $D = \{(x,y) : x \in I \text{ e } y \geq f(x)\}$ è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$ (cioè per coppia di punti P_0 e P_1 di D anche il segmento nel piano di estremi P_0 e P_1 è contenuto in D)

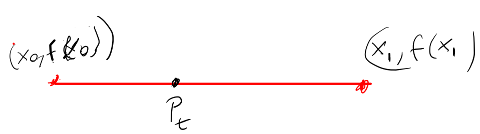


2) Per ogni $x_0, x_1 \in I$ e per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$f(\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x_t}) \leq (1-t) f(x_0) + t f(x_1).$$

$x_t \doteq (1-t)x_0 + t x_1$





P_t

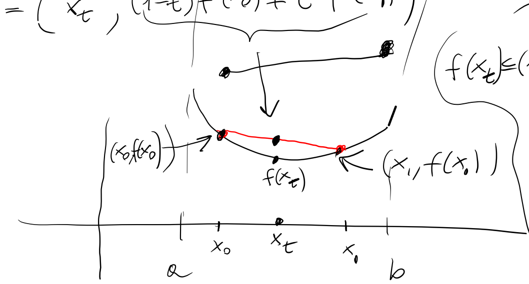
$P_0 = (x_0, f(x_0))$ $\quad$ $P_1 = (x_1, f(x_1))$

$$P_t = t(P_1 - P_0) + P_0 = t\big((x_1, f(x_1)) - (x_0, f(x_0))\big) + (x_0, f(x_0))$$

$$= \big(t(x_1 - x_0) + x_0,\ t(f(x_1) - f(x_0)) + f(x_0)\big)$$

$$= \big(\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x_t},\ (1-t)f(x_0) + t f(x_1)\big) \qquad t \in [0,1]$$

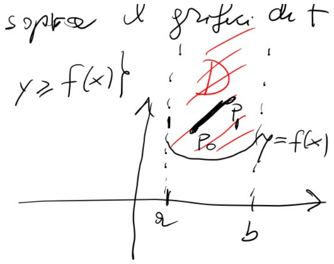
$$P_t = \big(x_t,\ (1-t) f(x_0) + t f(x_1)\big)$$



$f(x_t) \leq (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$
$\forall\, t \in [0,1]$
e $\forall\, x_0, x_1 \in I$

1) La regione del piano sopra il grafico di f

cioè $D=\{(x,y): x\in I \text{ e } y\ge f(x)\}$



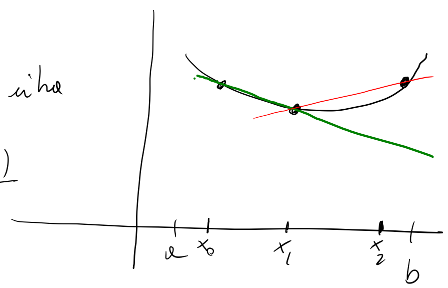
è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$ (cioè per coppia di punti P_0 e P_1 di D anche il segmento nel piano di estremi P_0 e P_1 è contenuto in D)

2) Per ogni $x_0, x_1 \in I$ e per ogni $t\in[0,1]$ si ha

$$f(\underbrace{(1-t)x_0+t x_1}_{x_t}) \le (1-t)f(x_0)+t f(x_1).$$

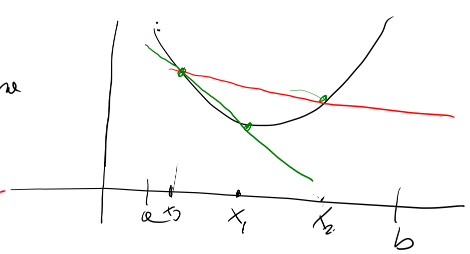
3) Per ogni tripla $x_0<x_1<x_2$ in I si ha

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



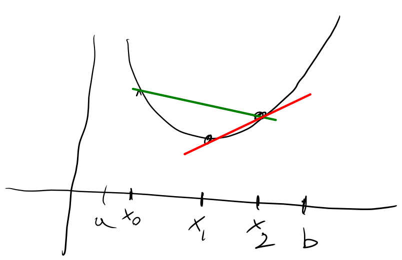
4) Per ogni tripla $x_0<x_1<x_2$ in I si ha

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$



5) Per ogni tripla $x_0<x_1<x_2$ in I si ha

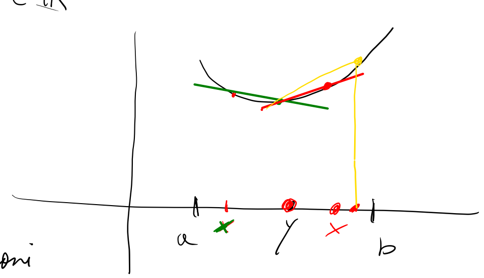
$$\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



6) Per ogni $y\in I$ la funzione

$$I\setminus\{y\}\ni x \longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\in\mathbb{R}$$

è crescente.



Definizione. Diciamo che $f: I\to\mathbb{R}$ è convessa se soddisfa una delle 6 proposizioni elencate nel teorema.

<u>Lemma</u> Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I un intervallo, ~~convessa~~ su I, e sia $x_0 \in \mathring{I}$. Allora esistono $f'_s(x_0)$, $f'_d(x_0)$ con $f'_s(x_0) \le f'_d(x_0)$. Questo in particolare implica che f è continua in x_0

$$\left(\lim_{x \to x_0^+} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0^+} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'_d(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = f'_d(x_0) \cdot 0 = 0 \right)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

<u>Dim</u> Per def se il limite esiste finito.

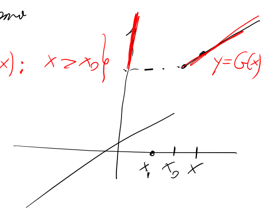
$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Esiste $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$? Si!

Per la seguente ragione. Se poniamo $G(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ il fatto che f è convessa implica che $G(x)$ è crescente

Allora, per un ben noto teorema

$$\lim_{x \to x_0^+} G(x) = \inf\{G(x) : x > x_0\}$$



$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \inf\left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : x > x_0 \right\}$$

se $x_1 \in I$ $x_1 < x_0$ per la convessità ho che

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \forall x > x_0 > x_1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \inf\left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : x > x_0 \right\} \ge \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} > -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{esiste } f'_d(x_0)$$

Notare che abbiamo dimostrato che

$$f'_d(x_0) \ge \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad \forall x_1 \in I \text{ con } x_1 < x_0$$

ovvero

$$f'_d(x_0) \ge \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \forall x \in I,\ x < x_0 \quad \text{con } (*)$$

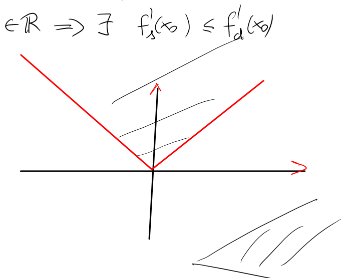
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sup\left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : \begin{matrix} x < x_0 \\ x \in I \end{matrix} \right\}$$

e siccome vale $(*)$ $\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$= \sup\left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : \begin{matrix} x < x_0 \\ x \in I \end{matrix} \right\} \le f'_d(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\ f'_s(x_0) \le f'_d(x_0)$$

<u>Esempio</u> $f(x) = |x|$



$f'_d(0) = 1$

$f'_s(0) = -1$

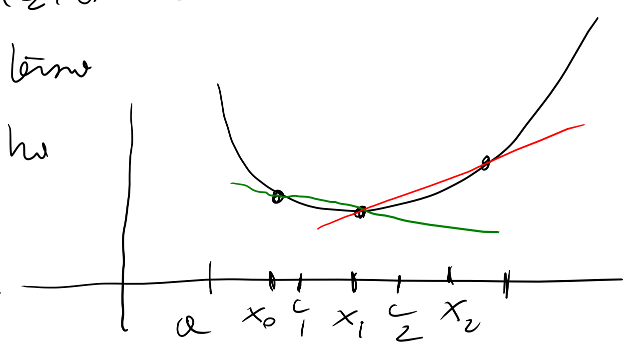
Teorema Sia $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo aperto e supponiamo che esista $f'(x)$ $\forall x \in I$. Allora le seguenti due proposizioni sono equivalenti:

1) f è convessa in I
2) $f'(x)$ è una funzione crescente in I.

Dim 2) $\Rightarrow$ 1)

supponiamo che $f'(x)$ sia crescente (cioè la 1)) e dimostriamo e scegliamo di dimostrare una delle 6 caratterizzazioni di funzione convessa e dimostriamo che per ogni terna $x_0 < x_1 < x_2$ in I si ha

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



Consideriamo il Teorema di Lagrange per f in $[x_0, x_1]$

$+$ $[x_1, x_2]$

Esistono punti $c_1 \in (x_0, x_1)$

$c_2 \in (x_1, x_2)$

tali che $f'(c_1) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ e $f'(c_2) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 \Rightarrow c_1 < c_2 \Rightarrow f'(c_1) \le f'(c_2)$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Teorema Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I aperto e supponiamo che $\exists\, f''(x)\ \forall x \in I$. Allora le due seguenti proposizioni sono equivalenti

1) f è convessa in I

2) $f''(x) \geq 0$ in I.

Dim: f' è crescente in $I \Leftrightarrow$

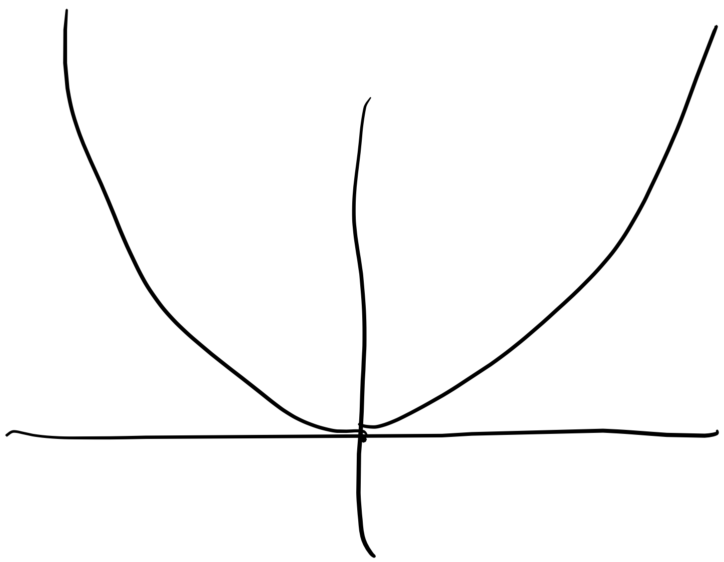
$(f')' \geq 0$ in $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ in I.

Convessità stretta $f: I \to \mathbb{R}$ si dice strettamente convessa se $\forall\ x_0 < x_1$ in I si ha

$$f((1-t)x_0 + t x_1) < (1-t)f(x_0) + t\, f(x_1) \qquad \forall\, t \in (0,1).$$

Teor Nelle ipotesi del precedente teorema se $f''(x) > 0\ \forall x \in I$ allora f è strettamente convessa.

$f(x) = x^2$



$f''(x) = 2 > 0$

$\Rightarrow \; x^2$ è strettamente convesso in $\mathbb{R}$.

$f(x) = e^{x^2}$ $\qquad f'(x) = 2x\, e^{x^2}$

$f''(x) = \left(2x\, e^{x^2}\right)' = 2\, e^{x^2} + 2x \; 2x\, e^{x^2}$

$= 2\, e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = 2\, e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) > 0$

è strettamente convesso.