Lezione 27 - 14/11/2025

Funzioni continue.

$f: \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$

f è continua in x_0 significa

1) x_0 è isolato (e non servono altre proprietà)

oppure

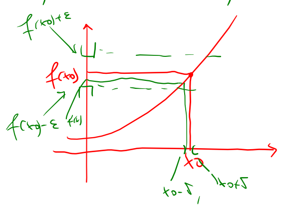
2) x_0 è di accumulazione per E e vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

caso interessante

oss. entrambe 1) o 2) risultano equivalenti a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



Esempi

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f polinomio, $x_0 \in \mathbb{R}$

f è continuo in x_0

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n$$

2) $f : \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, q(x) = 0\}}_{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ p, q polinomi

funzione razionale

è continua $\forall x_0 \in E$

3) $\sqrt[n]{\ } : [0, +\infty[\ \to [0, +\infty[$

$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ $\sqrt[n]{\ }$ è continua.

4) $\text{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$\text{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$

sono continue

es. $\lim_{x \to x_0} \text{sen}\, x = \text{sen}\, x_0$

5) $\text{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\text{arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\text{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

sono continue

6) $\exp_a : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ $(a > 0)$

è continua $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$

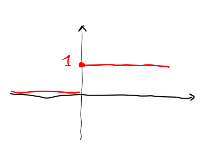
$a > 0, a \neq 1$ $\log_a :]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \log_a x$

è continua

$\lim_{x \to x_0} \log_a(x) = \log_a x_0$

7)



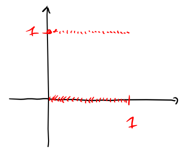
$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

funzione di HEAVISIDE

$\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1$

in 0 non è continua.

8) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$



funzione di RIEMANN

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste per nessun $x_0\in[0,1]$

è discontinua in ogni punto.

Prime proprietà delle funzioni continue

1) Teorema (permanenza del segno)

sia $f: \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{E}}\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in E$, f continua in x_0

se $f(x_0)>0$ allora $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x\in U\cap E$, $f(x)>0$.

(se f è continua in x_0 e $f(x_0)>0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui f è maggiore di 0)

2) Teorema (operazioni con le funzioni)

siano $f,g: E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in E$, f e g continue in x_0

Allora $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ e $\underbrace{\frac{f}{g}}_{\text{se è definita in } x_0 \text{ cioè se } g(x_0)\neq 0}$ sono continue in x_0

oss. le funzioni

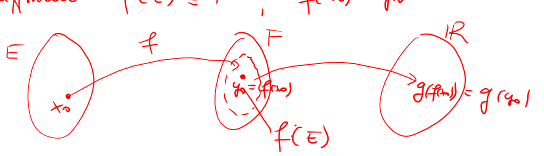
es. $x+x^2+\log x$, $x^2+\operatorname{sen} x$, $\frac{\cos x}{1+x^2}$ sono continue su tutto il loro dominio.

3) Teorema (composta di continue)

sia $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in E$, f continua in x_0

sia $g: F\to\mathbb{R}$, $F\subseteq\mathbb{R}$, $y_0\in F$, g continua in y_0

supponiamo $f(E)\subseteq F$, $f(x_0)=y_0$



Allora $g\circ f$ è continua in x_0

(composta di continue è continua)

dim.

g è continua in $y_0=f(x_0)$ significa

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0: \forall y\in F,\ |y-f(x_0)|<\delta \Rightarrow |g(y)-g(f(x_0))|<\varepsilon$

f è continua in x_0 significa

dim.

g è continua in $y_0 = f(x_0)$ significa
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in F, \quad |y - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

f è continua in x_0 significa

$\forall \delta > 0, \exists \rho > 0 : \forall x \in E, \quad |x - x_0| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$

concateniamo

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ma allora $\forall \delta > 0, \exists \rho > 0$
$\forall x \in E, \quad |x - x_0| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

cioè
$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 : \forall x \in E, \quad |x - x_0| < \rho \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon}_{\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) \text{ cioè } g \circ f \text{ è continua in } x_0}$$

CVD

Es

$\sqrt{x^2 + 1 + |\log(x)|}$ è continua (anche $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua)

$\operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg} x))$ "

$\log(e^x + \cos x)$ "

4) Teorema (continuità e successioni)

Sia $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $\bar{x} \in E$,
sono equivalenti
i) f è continua in $\bar{x}$

ii) Per ogni successione a valori in E
se $\lim_n x_n = \bar{x}$ allora $\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$

dim. i) ⇒ ii)
supponiamo che f sia continua in $\bar{x}$
e che $\lim_n x_n = \bar{x}$ dobbiamo far vedere che $\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$

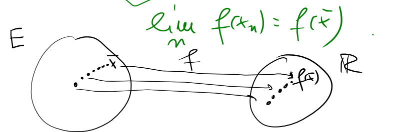
f continua in $\bar{x}$ significa
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \quad |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

$\lim_n x_n = \bar{x}$ significa
$\forall \delta > 0, \exists \bar{n} : \forall n, \quad n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \delta$

concateniamo
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ ma $\forall \delta, \exists \bar{n} : \forall n$
$n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

quindi
$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, \quad n > \bar{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon}_{\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})}$$

OK



viceversa se vale ii) devo provare che vale i)

per assurdo.

f non sia continua in $\bar{x}$ $\qquad \neg(p \Rightarrow q)\ \neg(\neg p \vee q)$ $\quad p \wedge \neg q$

devo provare che $\exists (x_n)_n$ t.c. $\lim_n x_n = \bar{x}$ e

$$\neg\left(\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})\right)$$

$\neg$(f è continua in $\bar{x}$) $\qquad \neg(p \Rightarrow q)$

$$\neg\left(\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \forall x \in E,\ |x-\bar{x}|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon\right)$$

$$\exists \varepsilon>0 : \forall \delta>0, \exists x_\delta \in E,\ |x_\delta-\bar{x}|<\delta \wedge |f(x_\delta)-f(\bar{x})| \geq$$

fisso $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n : \underbrace{|x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n}}_{\lim_n x_n = \bar{x}} \wedge \underbrace{|f(x_n)-f(\bar{x})| \geq \varepsilon}$$

$$\underbrace{|f(x_n)-f(\bar{x})| \geq \varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg\left(\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})\right)$$

quindi ho trovato $(x_n)_n$ t.c. $\lim_n x_n = \bar{x}$ e

$$\neg\left(\lim_n f(x_n) = f(\bar{x})\right)$$

non vale ii)

CVD

PROPRIETA' FONDAMENTALI
delle funzioni continue

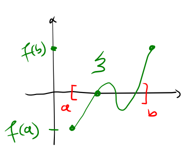
Teorema (degli zeri)

sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad (a,b \in \mathbb{R})$

f sia continua.

Supponiamo che $f(a)<0$ e $f(b)>0$

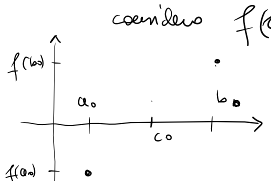
Allora $\exists \xi \in]a,b[: f(\xi) = 0$ $\quad$ (analogo x $f(a)>0$ e $f(b)<0$)



dim. $\quad$ chiamo $a = a_0$, chiamo $b = b_0$

considero $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ $\quad$ (c_0 punto medio di $[a,b]$)

considero $f(c_0)$

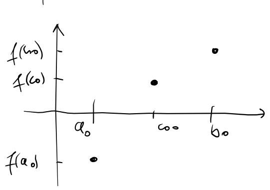


ho 3 possibilità

1) $f(c_0) = 0$ ho finito.

2) $f(c_0) > 0$

3) $f(c_0) < 0$



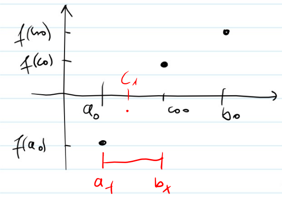
supponiamo $f(c_0) > 0$

chiamo $a_0 = a_1$, $c_0 = b_1$

e considero $[a_1, b_1]$

se invece $f(c_0) < 0$

3) $f(c_0) < 0$

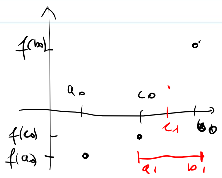


supponiamo $f(c_0) > 0$

chiamo $a_0 = a_1$, $c_0 = b_1$

e considero $[a_1, b_1]$

se invece $f(c_0) < 0$



chiamo $c_0 = a_1$, $b_0 = b_1$

su $[a_1, b_1]$ ho la stessa situazione che su $[a_0, b_0]$ $\begin{cases} f(a_1)<0 \\ f(b_1)>0 \end{cases}$

considero $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

considero $f(c_1)$

se $f(c_1) = 0$ ho finito $(c_1 = \xi)$

se $f(c_1) > 0$

chiamo $a_1 = a_2$, $c_1 = b_2$ e considero $[a_2, b_2]$

se $f(c_1) < 0$

chiamo $c_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ e considero $[a_2, b_2]$

$f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$

Proseguo in questo modo

o mi fermo al passo k-esimo $\longrightarrow$ $(c_k = \xi)$

o ho costruito una successione di intervalli $([a_n, b_n])_n$ chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati con la proprietà $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$

per Cantor $\exists\, \xi \in \mathbb{R} : \bigcap_n [a_n, b_n] = \{\xi\}$

Per concludere dimostro che $f(\xi) = 0$

osservo che $\forall n$, $a_n \leq \xi \leq b_n$ ($\xi \in [a_n, b_n]$ perché $\xi \in \bigcap_n [a_n, b_n]$)

$|\xi - a_n| \leq |b_n - a_n| = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$

$\lim_n a_n = \xi$

$$\underset{\downarrow}{0} \leq \underset{\downarrow 0}{|\xi - a_n|} \leq \underset{\downarrow n \; 0}{\frac{b_0 - a_0}{2^n}}$$

analogamente

$\lim_n b_n = \xi$

f continua, $\lim_n a_n = \xi \Rightarrow \lim_n f(a_n) = f(\xi)$

$\lim_n b_n = \xi \Rightarrow \lim_n f(b_n) = f(\xi)$

però $\forall n, f(a_n) < 0 \Rightarrow f(\xi) \leq 0$

$\forall n, f(b_n) > 0 \Rightarrow f(\xi) \geq 0$

$\Rightarrow f(\xi) = 0$

CVD

permanenza del segno

Corollario (teorema dei valori intermedi)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f sia continua

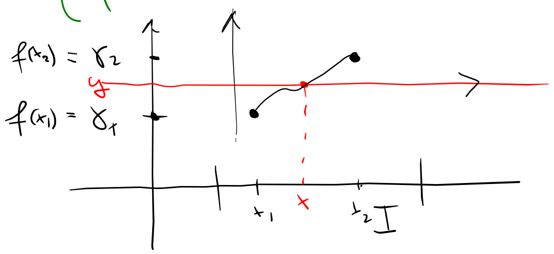
(I: intervallo di $\mathbb{R}$)

supponiamo che γ_1 e $\gamma_2 \in f(I)$ con $\gamma_1 < \gamma_2$

(f assume i valori γ_1 e γ_2)

Allora, $\forall y \in [\gamma_1, \gamma_2]$, $\exists x \in I : f(x) = y$

(f assume tutti i valori intermedi)



dim. so che $\exists x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) = \gamma_1$, $f(x_2) = \gamma_2$

e sia $x_1 < x_2$ (so che $\gamma_1 < y < \gamma_2$)

considero
$$g : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) - y$$

per poterla definire $[x_1, x_2] \subseteq I$

$$g(x_1) = \gamma_1 - y < 0$$
$$g(x_2) = \gamma_2 - y > 0$$

g è continua? sì perché è diff di 2 continue (f e una costante)

Applico il teor. degli zeri a g

$$\exists \xi \in \,]x_1, x_2[\, : \quad g(\xi) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$f(\xi) - y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$f(\xi) = y$$

CVD

oss. È fondamentale che f sia definita su un intervallo e che sia continua