Applicazioni Lineari
(dagli spazi vettoriali alle funzioni fra spazi vettoriali)

DEF Siano V, W due spazi vettoriali sullo stesso campo K. $f: V \longrightarrow W$ è un **MORFISMO** di spazi vettoriali oppure **APPLICAZIONE LINEARE** (formano l'insieme $\mathrm{Hom}(V,W)$) se:

$\forall v_1, v_2 \in V$ i). $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$ ← f RISPETTA LA SOMMA

$\forall v \in V, \forall c \in K$ ii). $f(c \cdot v) = c \cdot f(v)$ ← f RISPETTA LA MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE

f RISPETTA LA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE

f si dice: **MONOMORFISMO** se f INIETTIVA e si scrive $f: V \hookrightarrow W$

EPIMORFISMO se f SURIETTIVA e si scrive $f: V \twoheadrightarrow W$

ISOMORFISMO se f INIETTIVA & SURIETTIVA. $f: V \xrightarrow{\cong} W$

ENDOMORFISMO se $V=W$. $\mathrm{End}(V)$ è l'insieme degli endomorf. di V.

AUTOMORFISMO se $V=W$ e ISOMORFISMO. $GL(V)$ è il loro insieme.

$GL_n(K) := GL(K^n)$.

Osservazioni:

1. Se $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ [ovvero è una applicazione lineare da V a W] allora $f(0_V) = f(0_K \cdot \tilde{v}) \overset{2)}{=} 0_K \cdot f(\tilde{v}) = 0_W$, i.e. porta lo zero in zero.

IL VETTORE NULLO IN V — LO ZERO DEL CAMPO K — QUALSIASI VETTORE DI V — IL VETTORE NULLO IN W

2. $(\mathrm{End}(V), \circ)$ è un **MONOIDE** con elemento neutro $f = id_V : V \to V$, $v \mapsto v$ (APPLICAZIONE IDENTITÀ; $\circ$: COMPOSIZIONE)
infatti è chiuso rispetto alla composizione, che è associativa, mentre $(GL(V), \circ)$ è un **GRUPPO** perché ogni elemento è un isomorfismo, quindi iniettivo e suriettivo, quindi invertibile e l'inversa di ogni applicazione lineare (quando ∃) è sempre lineare.

3. Gli **SPAZI VETTORIALI/K** con le **APPLICAZ. LINEARI** formano una **CATEGORIA**, ovvero
i). $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(V,W), g \in \mathrm{Hom}(W,X), h \in \mathrm{Hom}(X,Y)$
ii). $\exists\, id_V \quad \forall V$ spazio vettoriale su K

4. $(\mathrm{Hom}(V,W), +, \circ)$ è uno **SPAZIO VETTORIALE/K** con $0 : V \to W$, $v \mapsto 0_W$ (APPLICAZIONE NULLA)
dove la somma $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$
e la moltiplicazione per scalare $(c \cdot f)(v) := \underset{\in K}{c} \cdot f(v)$

5. $\dim(V) = n \Rightarrow V \cong K^n$ (ovvero esiste un ISOMORFISMO $f: V \xrightarrow{\cong} K^n$)

Questo è un principio forte e molto utile: ci dice che anche se non è vero che uno spazio vettoriale su K n-dimensionale è uguale a K^n, gli è **ISOMORFO** (cioè ha la "stessa struttura", chiaramente l'isomorfia è una **RELAZIONE di EQUIVALENZA**).

Esplicitamente, sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V (che sappiamo esiste sempre) e costruiamo $f_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow K^n$, $v_i \longmapsto e_i$ (MANDIAMOLI NELLA BASE CANONICA) e, dopo aver **DEFINITO IL MORFISMO** $f_{\mathcal{B}}$ **SULLA BASE** di V, lo **ESTENDIAMO PER LINEARITÀ** a tutti gli elementi di V, ovvero se $v \in V$:

$$\underset{\in V}{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Longrightarrow f_{\mathcal{B}}(v) = f_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{f_{\mathcal{B}}(v_i)}_{=:e_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in K^n$$

Ecco che, dopo aver esteso per linearità la definizione di $f_{\mathcal{B}}$ dai soli elementi della base $\mathcal{B}$ a tutti i vettori di V, ora la costruzione di $f_{\mathcal{B}}$ (la sua definizione) è completa. $f_{\mathcal{B}}$ è chiaramente invertibile $w = \sum \mu_i e_i \longmapsto f_{\mathcal{B}}^{-1}(w) := \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \in V$ e quindi è un ISOMORFISMO.

6. OGNI MATRICE È UN'APPLICAZIONE LINEARE!

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}_A : K^m \longrightarrow K^n$$

PRODOTTO RIGA PER COLONNA

$$v \longmapsto \mathcal{L}_A(v) := A.v \in K^n$$

In altre parole $\exists f : M_{n\times m}(K) \longrightarrow Hom(K^m, K^n)$

Esempi?

$K=\mathbb{R}$

1. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} := \sqrt[5]{x^5+y^5}$ soddisfa entrambe i) e ii) proprietà delle applicazioni lineari?

2. $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $K=\mathbb{C}$ $f(z) := \bar{z}$ soddisfa i) e ii) ?

POLINOMIO IN t DI GRADO AL PIÙ d

3. $f: K[t]_d \longrightarrow K[t]_d$, $f(P(t)) := P'(t)$ è un'applicaz. lineare?

DERIVATA DEL POLINOMIO

$K=\mathbb{R}$

4. $f: \mathbb{R}[t]_d \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(P(t)) := \int_a^b P(t)dt$ è un'applicaz. lineare?

PER a, b FISSATI

5. $f: U \oplus W \longrightarrow U$ $f(v=u+w) := u$ è un'applicaz. lineare?

SOMMA DIRETTA $\Rightarrow$ NON C'È AMBIGUITÀ NELLA DECOMPOSIZIONE

TEOREMA [di STRUTTURA per APPLICAZIONI LINEARI]

Siano **V, W** spazi vettoriali su un campo K, sia V **FINITAMENTE GENERATO**. Sia $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ una base per V e siano $w_1, \dots, w_n$ n elementi fissati per W. Allora **ESISTE ED È UNICA** un'applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ tale che

$$f(v_i) = w_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Dim.: sia $v \in V$. Decomponiamo v nella base $\mathcal{B}$: $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.
Allora definiamo $f: V \to W$ come quella funzione che associa

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$$

Claim: $f(v_i) = w_i \ \forall i$. Ma questo è vero perché prendendo $v := v_i$ allora $v_i = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j = \delta_{ij}) v_j \Rightarrow f(v_i) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} w_j = w_i$ ✓

Claim: f è lineare. Questo è vero perché $f(kv) = f(k \cdot \sum \lambda_i v_i)$
$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (k\lambda_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (k\lambda_i) w_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i = k \cdot f(v)$
e d'altra parte abbiamo anche che

$$f(u+v) = f\left(\sum \mu_i v_i + \sum \lambda_i v_i\right) = f\left(\sum (\mu_i+\lambda_i) v_i\right) = \sum (\mu_i+\lambda_i) w_i$$
$$= \sum \mu_i w_i + \sum \lambda_i w_i = f(u) + f(v)$$

Claim: se f è tale che $f(v_i) = w_i$ $i=1,\dots,n \Rightarrow f$ è unica.
Questo è vero perché per assurdo se anche $g(v_i) = w_i$:

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i = f\left(\sum \lambda_i v_i\right) = f(v)$$

perciò avremmo che $g(v) = f(v)$ $\forall v \in V$ e quindi $f = g$ $\square$

IL COROLLARIO STA IN QUESTO RICCIOLO! AFFERMA CHE È INIETTIVA

$\boxed{\textbf{COR}}$ $\mathcal{L} : M_{n\times m}(K) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$.
$$A \longmapsto \mathcal{L}_A$$

LI PENSIAMO COME I V_i DEL TEOREMA

LI PENSIAMO COME I W_i DEL TEOREMA

Dim.: Basta osservare che $\mathcal{L}_A(e_i \in K^m) = A^{(i)}$
quindi il morfismo $\mathcal{L}_A : K^m \to K^n$ è univocamente determinato dalla matrice A, cioè $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B \Leftrightarrow A = B$, in altre parole il morfismo $\mathcal{L}$ è **iniettivo**.

In realtà vale molto di più:

$$f : K^m \longrightarrow K^n$$

ENTRAMBI CON BASE CANONICA

FORMA GENERICA DI UNA APPLICAZIONE LINEARE

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^n$$

Allora si vede che $f = \mathcal{L}_A$ per $A = (a_{ij})_{i,j}$

In altre parole abbiamo trovato un inverso per $\mathcal{L}$, cioè

$$\mathcal{L} : M_{n \times m}(K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(K^m, K^n) \quad \text{ISOMORFISMO}$$

$$A \longmapsto \mathcal{L}_A$$

[VEDREMO CON DETTAGLI LA PROSSIMA LEZIONE]