Nucleo & Immagine

Def $f: V \to W$. $\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ IL NUCLEO DI f

$\operatorname{Im}(f) := \{w \in W \mid w = f(\exists v)\}$ L'IMMAGINE DI f

SI LEGGE: TUTTI I $w \in W$ CHE SONO IMMAGINE DI ALMENO UN $v \in V$

PROP i). $\left.\begin{array}{l}\ker(f) \leq V \\ \operatorname{Im}(f) \leq W\end{array}\right\}$ sono entrambi SOTTOSPAZI VETTORIALI

$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \quad \forall \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE di V

ii). $\begin{cases}\ker(f) = \{0\} \iff f \text{ MONOMORFISMO} \\ \operatorname{Im}(f) = W \iff f \text{ EPIMORFISMO}\end{cases}$

Dim.: i). $\begin{cases} f(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_V \in \ker(f) \Rightarrow \ker(f) \neq \emptyset. \\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W \quad \forall v_1, v_2 \in \ker(f) \\ f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot 0_W = 0_W \quad \forall v \in \ker(f) \ \forall \lambda \in K \end{cases}$

Quindi $\ker(f) \leq V$ è un sottospazio vettoriale ✓

In modo analogo si mostra per $\operatorname{Im}(f) \leq W$. ✓

$\supseteq$) $f(v_1), \dots, f(v_n) \in Im(f)$, e $Im(f)$ è sottospazio vettoriale quindi chiuso rispetto a somma e moltipl. per scalari allora $Im(f) \supseteq Span(f(v_1), \dots, f(v_n))$

$\subseteq$) $v = f(\exists u) \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} \exists \lambda_i v_i \Rightarrow f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = v$

$\Rightarrow v \in Span(f(v_1), \dots, f(v_n)) \Rightarrow Span(f(v_1), \dots, f(v_n)) \subseteq Im(f)$

ii) Dimostriamo l'enunciato per il nucleo.

$\Rightarrow$) Se $v \neq w \Rightarrow v - w \neq 0 \Rightarrow 0 \neq f(v-w) = f(v) - f(w)$.

$\Leftarrow$) Se $v \neq 0 \Rightarrow f(v) \neq f(0) = 0 \Rightarrow v \notin ker(f) \Rightarrow ker(f) = \{0\}$.

L'enunciato per l'immagine vale per definizione

$\square$

TEOREMA [della DIMENSIONE]

$$\left.\begin{array}{l} f: V \to W \\ \dim(V) < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Dim.: $\ker(f) \subseteq V$ e $\dim(V) = n \Rightarrow k := \dim(\ker(f)) \leq n$.

Scegliamo allora una **BASE di $\ker(f)$ e COMPLETIAMOLA ad una BASE di V**. Otteniamo $\{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{BASE di } \ker(f)}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{\text{VETTORI AGGIUNTI COL COMPLETAMENTO IN NUMERO } n-k}\} =: B$

È sufficiente dimostrare che $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n-k$.

Siccome $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}(f(v_1), \dots, f(v_k), f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$ ma i primi k vettori appartengono al nucleo $\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$. Non rimane che mostrare che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearm. indipendenti.

Quindi consideriamo $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(v_i) = 0$ e mostriamo $\lambda_i = 0 \ \forall i = k+1, \dots, n$.

$$0 = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i\right) \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \in \ker(f) = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k) \text{ come base}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} (-\lambda_j) v_j + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \xRightarrow{\{v_1, \dots, v_n\} \text{ BASE DI } V} \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k, k+1, \dots, n$$

$\square$

COR $\left.\begin{array}{l} f: V \to W \\ \dim(V) = \dim(W) = n < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow [f \text{ MONO} \Leftrightarrow f \text{ EPI} \Leftrightarrow f \text{ ISO}]$

Dim.: $\ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \overset{\text{PER IL TEOREMA DELLA DIMENSIONE}}{\Leftrightarrow} \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V) \overset{\text{PER IPOTESI}}{=} \dim(W)$

ma $\operatorname{Im}(f) \subseteq W$, quindi $\ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = W$

$\ker(f) = \{0\} \Updownarrow f$ MONO (CIOÈ INIETTIVA)

$\operatorname{Im}(f) = W \Updownarrow f$ EPI (CIOÈ SURIETTIVA)

Per chiudere la dimostrazione si ricordi che ISO $\Leftrightarrow$ MONO $\wedge$ EPI

$\square$

TEOREMA

SONO **ISOMORFI**: VUOL DIRE CHE $\exists f : V \xrightarrow[\text{ISO}]{\cong} W$

$$\left.\begin{array}{l}\dim(V) < +\infty \\ \dim(W) < +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \left[V \cong W \iff \dim(V) = \dim(W) \right]$$

Parafrasi:

"Spazi vettoriali di dimensione finita uguale sono isomorfi"

Dim.: $\Rightarrow$). $f : V \xrightarrow{\cong} W$ iso $\underset{\text{ISO} \Rightarrow \text{MONO}}{\Rightarrow} \dim(\ker(f)) = 0 \underset{\text{TEOREMA DELLA DIMENSIONE APPLICAZ. LINEARI}}{\Rightarrow} \dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(W)$

$\Leftarrow$). $\left.\begin{array}{l} B_V := \{v_1, \dots, v_n\} \\ B_W := \{w_1, \dots, w_n\} \end{array}\right\} \underset{\text{TEOREMA DI STRUTTURA APPLICAZIONI LINEARI}}{\Rightarrow} \exists! f : f(v_i) = w_i \ \forall i \underset{\text{TERZO PUNTO DELLA PROPOSIZIONE SOPRA}}{\Rightarrow} \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}(\underbrace{f(v_i)}_{w_i}) = W$

$$\Downarrow \text{def}$$

$$f \text{ EPI},\ \dim(V) = \dim(W)$$

$$\Downarrow \text{COR SOPRA}$$

$$f \text{ ISO}$$

$\square$

Oss: $\mathcal{L}_A : K^m \longrightarrow K^n$. Siccome $\mathcal{L}_A(e_i) = A^{(i)}$ allora

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}_A) = \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})$$

Prendendone la dimensione da ambo i lati:

$$\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{L}_A)) = \dim(\mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})) = \mathrm{rank}(A)$$

D: Cosa succede se lavoriamo con la forma scala $\tilde{A}$ invece di A?

R: $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A})$, quindi $\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{L}_A)) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{L}_{\tilde{A}}))$

D: ma rimane vero a livello degli spazi vettoriali, cioè

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}_A) \stackrel{?}{=} \mathrm{Im}(\mathcal{L}_{\tilde{A}})$$

R: In generale **NO!**: $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(\mathcal{L}_A) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \mathrm{Im}(\mathcal{L}_{\tilde{A}}) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

D: Funziona a livelli di nucleo invece, cioè $\ker(\mathcal{L}_A) \stackrel{?}{=} \ker(\mathcal{L}_{\tilde{A}})$

R: **SI!** Perché $\ker(\mathcal{L}_A) = \{x \mid A \cdot x = 0\}$ SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LIN. OMOGENEO di A

e le **OPERAZ. ELEMENTARI NON CAMBIANO** gli spazi delle soluz!

Esempio [TIPICO ESERCIZIO D'ESAME]

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 6x-4y+0z\\ 3x-2y+2z\\ 0x+0y+2z\end{pmatrix} \Rightarrow f=\mathcal{L}_A \text{ per } A=\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0\\ 3 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

- $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Span}(A^{(1)},A^{(2)},A^{(3)})=\mathrm{Span}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}}_{\text{BASE per } \mathrm{Im}(f)}\Bigg)$

IN PARTICOLARE $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$

- $\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, \underbrace{A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0}_{\text{RISOLVO SISTEMA LINEARE OMOGENEO}}\right\}=\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right)$

Per trovare le dimensioni potevamo anche $A \xrightarrow{\text{Gauß}} \tilde{A}$ FORMA SCALA

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \mathrm{rank}(A)=2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f))=2\\ \Rightarrow \dim(\ker(f))=\underbrace{\dim(V)}_{=3}-\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=2}=1\end{array}$$

⚠ $\ker(\mathcal{L}_A)=\ker(\mathcal{L}_{\tilde{A}})$ MA $\mathrm{Im}(\mathcal{L}_A)\neq\mathrm{Im}(\mathcal{L}_{\tilde{A}})$!!

ANCHE SE HANNO SEMPRE LA STESSA **DIMENSIONE**