Esempio [TIPICO D'ESAME]

I.E. ENTRAMBE BASI CANONICHE

$$f: V=\mathbb{R}^2 \longrightarrow W=\mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{B}:=\mathcal{E}_V = \{e_1,e_2\}, \quad \mathcal{C}:=\mathcal{E}_W = \{e_1',e_2',e_3'\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x \\ x+y \end{pmatrix}$$

Costruiamo la matrice $A := M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(f) \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$\left.\begin{aligned} A^{(1)} &:= f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A^{(2)} &:= f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A) = 2 \Longrightarrow$ per il teorema della dimensione

$$\underbrace{\dim(V)}_{=\dim(\mathbb{R}^2)=2} = \dim(\ker(f)) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{=\operatorname{rank}(f)=\operatorname{rank}(A)=2}$$

$\Downarrow$

$\dim(\ker(f)) = 0$

$\Downarrow$

$\ker(f) = \{0\}$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\mathcal{D}$: E se invece che avere le basi **CANONICHE** avessimo avuto due basi più complicate?

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{ \underbrace{\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}_{\text{LINEARM. INDIP.}} \} \qquad \tilde{\mathcal{C}} := \{ \underbrace{\overset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\text{LINEARM. INDIP.}} \}$$

Allora abbiamo **UNO STEP AGGIUNTIVO**: Determinare $f(v_1), f(v_2)$ **COME COMBINAZIONE LINEARE di** w_1, w_2, w_3.

$$A^{(1)}: \quad f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)}: \quad f(v_2) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per determinare la prima colonna $A^{(1)}$ dobbiamo determinare i coefficienti della combinazione lineare di w_1, w_2, w_3 che danno $f(v_1)$, cioè vogliamo trovare a_{11}, a_{21}, a_{31}. Come al solito questo significa che dobbiamo risolvere un sistema lineare! Sì, ma quale?

Basta usare la definizione di prodotto righe per colonne e riscrivere il sistema come:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{FORMA MATRICE}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

LA MATRICE COMPLETA È GIÀ IN FORMA SCALA! SIAMO FORTUNATI

$\rightsquigarrow$ METODO di SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO:

$$\begin{cases} a_{31} = 2 \\ a_{21} + \overset{2}{a_{31}} = 1 \Rightarrow a_{21} = -1 \\ a_{11} + \overset{-1}{a_{21}} + \overset{2}{a_{31}} = -1 \Rightarrow a_{11} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(v_1) = -2w_1 - 1 \cdot w_2 + 2w_3 \Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per trovare la seconda colonna $A^{(2)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} a_{32} = 0 \\ a_{22} + 0 = 1 \Rightarrow a_{22} = 1 \\ a_{12} + 0 + 1 = 5 \Rightarrow a_{12} = 4 \end{cases}$$

GIÀ IN FORMA SCALA

$$\Rightarrow f(v_2) = 4w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ne concludiamo che:

$$A = M_{\tilde{\mathcal{C}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Oss.: $\mathrm{rank}(f)$, $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ rimangono invariati perché in effetti f è la stessa di prima, abbiamo solo usato **BASI DIVERSE**.

D: ma quindi però sfruttare questa cosa per calcolarsi cose nelle basi canoniche che sono più facili?!

R: esatto.

Esempio: $f: \underset{\substack{\shortparallel \\ V}}{\mathbb{R}^3} \to \underset{\substack{\shortparallel \\ W}}{\mathbb{R}^3}$ con BASI CANONICHE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+\pi z \\ x-y+\sqrt{2}\cdot z \\ y+z \end{pmatrix} \rightsquigarrow M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \pi \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}\left(M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(f)\right) \overset{\text{Gauß}}{=} 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im}(f))$$

$$= 3-3 = 0 \Rightarrow \ker(f) = \{0\}$$

Esempio: $f: \underset{}{\overset{V}{\mathbb{R}[x]_3}} \longrightarrow \overset{W}{\mathbb{R}[x]_3}$

$$p(x) \longmapsto p'(x)$$

AD UN POLINOMIO ASSOCIA LA SUA DERIVATA

Scegliamo $B^V = B^W = \{1, x, x^2, x^3\}$ perché ogni polinomio di grado al più 3 si può scrivere come:

$$p(x) = 1 \cdot a_0 + x^1 \cdot a_1 + x^2 \cdot a_2 + x^3 \cdot a_3$$

STEP I: Calcoliamo le immagini dei vettori della base B^V nella base del codominio B^W

$$f(1) = \frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$$

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$f(x^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$f(x^3) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\rightsquigarrow M^{\mathcal{E}^V}_{\mathcal{E}^W}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

chiaramente di rango $= 3 = \dim(\mathrm{Im}(f))$

$$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}[x]_3) - \operatorname{rank}\left(M^{\mathcal{E}^V}_{\mathcal{E}^W}(f)\right)$$

$$= 4 - 3 = 1$$

Quindi $\ker(f) \neq \{0\}$ e quindi la funzione derivata è un'applicazione lineare **NON INIETTIVA**. Ma questo non lo sapevamo già perché per esempio

$$\frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{5x^2+3}) = 10 \cdot x = \frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{5x^2-1})$$

DUE ELEMENTI DIVERSI CON LA STESSA IMMAGINE

Ma se il nucleo non è banale, dobbiamo preoccuparci di descriverlo come spazio vettoriale con una base

$$\ker(f) = \operatorname{Span}(v)$$

BASTA UN SOLO VETTORE PERCHÉ DIM(KER(f)) = 1

dove v è soluzione del sistema lineare omogeneo (non la soluzione nulla!)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ha chiaramente soluzioni della forma

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \ker(f) = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}(e_1)$$

ma anche questo noi lo sapevamo già! Infatti

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x) = 0 \implies p(x) = t \in \mathbb{R} \text{ COSTANTE}$$

e la prima coordinata di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ moltiplica proprio l'elemento della base x^0 che rappresenta i termini costanti.

D'altra parte si ha che: $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3)$$