



Cambi di base

PROP.:

COMPOSIZIONE

PRODOTTO RIGA PER COLONNA

$$i). M_C^D(f \circ g) = M_C^B(f) \cdot M_B^D(g)$$

$$\begin{matrix} V_1 & \xrightarrow{g} & V_2 & \xrightarrow{f} & V_3 \\ \downarrow \varphi_D & & \downarrow \varphi_B & & \downarrow \varphi_C \end{matrix}$$

$$ii). f \text{ ISO} \Leftrightarrow M_B^B(f) \text{ INVERTIBILE, } \forall f \in \text{End}(V) \quad \forall B \text{ base di } V$$

$$M_B^B(f^{-1}) = M_B^B(f)^{-1}$$

$$\forall f \in GL(V) \quad \forall B \text{ base di } V$$

$$iii). M_{B_2}^{B_1}(\text{Id}_V) \text{ INVERTIBILE,}$$

$$(M_{B_2}^{B_1}(\text{Id}_V))^{-1} = M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_V)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall B_1, B_2 \text{ basi di } V \end{array} \right.$$

$$iv). M_{C_2}^{B_2}(f) = M_{C_2}^{C_1}(\text{Id}_W) \cdot M_{C_1}^{B_1}(f) \cdot M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_V)$$

$\forall B_1, B_2$ basi di V

$\forall C_1, C_2$ basi di W

$$M_{B_2}^{B_2}(f) = (M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_V))^{-1} \cdot M_{B_1}^{B_1}(f) \cdot M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_V) \quad \forall B_1, B_2 \text{ basi di } V$$

Def: $M_{B_2}^{B_1}(\text{Id}_V) \in M_{\dim(V)}(K)$ è detta **MATRICE del CAMBIO di**
BASSE da B_1 a B_2 (B_1, B_2 basi di V)

Dim.: i). vedi Serres

ii). f iso $\Leftrightarrow \exists f^{-1}$ applicazione lineare tale che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_V$

$$\Rightarrow M_B^B(f \circ f^{-1}) = M_B^B(Id_V) = M_B^B(f^{-1} \circ f)$$

↑ APPLICO $M_B^B(\bullet)$

$$\overset{\parallel i.)}{M_B^B(f)} \cdot M_B^B(f^{-1}) \overset{\parallel i.)}{M_B^B(f^{-1})} \cdot M_B^B(f)$$

↑ $M_B^B(\bullet)$

↑ $Id_{\dim(V)}$ MATRICE IDENTITA'

iii). $Id_{\dim(V)} \overset{\text{VISTO PAG. 7}}{=} M_{B_1}^{B_1}(Id_V) \overset{\substack{\uparrow \\ Id = Id \circ Id}}{=} M_{B_1}^{B_1}(Id_V \circ Id_V) \overset{i.)}{=} M_{B_2}^{B_1}(Id_V) \cdot M_{B_1}^{B_2}(Id_V)$

e poi scambiamo i ruoli di B_1 e di B_2 .

iv). Per la prima uguaglianza: (la seconda segue dalla prima usando iii.)

$$M_{B_2}^{B_1}(Id_W) \cdot M_{B_1}^{B_1}(f) \cdot M_{B_1}^{B_2}(Id_V) = M_{B_2}^{B_1}(Id_W) \cdot M_{B_1}^{B_2}(f) \overset{i.)}{=} M_{B_2}^{B_2}(Id_W \circ f)$$

PER i). UGUALE A

$$M_{B_1}^{B_2}(f \circ Id_V) = f$$

$$\overset{\parallel}{M_{B_2}^{B_2}(f)}$$

□

Esempi:

Esempio 1: $B_1 = \mathcal{E}_V = \{e_1, e_2\}$ CANONICO
 $B_2 = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ } 2 BASI DI $V = \mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_V) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{B_2}^{B_1}(\text{Id}_V) = (M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_V))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Quindi se $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ coordinate rispetto alla canonica B_1 , rispetto alla base B_2 ha coordinate: $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -a - 2b \end{pmatrix}$

Esempio 2: $V = M_2(\mathbb{C})$.

$$B_1 = \mathcal{E}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ CANONICA}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ NON CANONICA}$$

Interpretiamo $M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \longleftrightarrow (a \ b \ c \ d) \in \mathbb{C}^4$

$$\Rightarrow M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_{\mathbb{C}^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{B_2}^{B_1}(\text{Id}_{\mathbb{C}^4}) = \left(M_{B_1}^{B_2}(\text{Id}_{\mathbb{C}^4}) \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Perciò una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nella base canonica si esprime nella base B_2 come:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + d \\ b + c \\ ib - ic \\ a - d \end{pmatrix}$$

Esempio 3: [TIPICO ESERCIZIO ESAME]

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + 2x_4 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\mathbb{R}^3}^{\mathbb{R}^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

↓ GAUß

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si come $\text{rank}(M_{\mathbb{R}^3}^{\mathbb{R}^4}(f)) = 3$

allora per il Teorema della Dimensione per applicaz. lineari:

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{=4} = \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{=\text{rank}(\dots)=3} + \dim(\ker(f)), \quad \text{quindi otteniamo: } \dim(\ker(f)) = 1$$

Per determinare esplicitamente il nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo:

$$\ker(f) = S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MEMO: SIAMO AUTORIZZATI AD UTILIZZARE LA FORMA SCALA PERCHÉ LE OPERAZIONI ELEMENTARI PRESERVANO SOLUZIONI DI SISTEMI LINEARI E QUINDI IL $\ker(f)$ È INVARIANTE PER ALGORITMO GAUß

Consideriamo le seguenti basi:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^4 \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

e calcoliamo $M_C^B(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \dots & a_{34} \end{pmatrix}$

STEP I: Esprimiamo $f(\text{VETTORI di } B) = \text{COMBINAZ. LINEARE dei VETTORI di } C$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{24} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{34} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

STEP I: Ogniuna delle quattro combinazioni lineari da origine ad un sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUB + SOSTITUZ. ALL' INDIETRO}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUB + SOSTITUZ. ALL' INDIETRO}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUB + SOSTITUZ. ALL' INDIETRO}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUB + SOSTITUZ. ALL' INDIETRO}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

STEP II: Allora la matrice $M_C^B(f)$ è quella matrice che ha come colonne le soluzioni dei sistemi lineari appena risolti:

$$\xrightarrow{\quad} M_C^B(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare l'applicazione lineare scritta nelle basi B e G diventa:

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \end{pmatrix}$$

In alternativa potremmo determinare $M_G^B(f)$ usando:

$$M_G^{\mathcal{E}_3}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_4}(f) \cdot M_{\mathcal{E}_4}^B(\text{Id}_{\mathbb{R}^4}) = M_G^B(f)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OTTENUTA COME

$$\left(M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

TRAMITE GAUB PER L'INVERSA
O METODO DEL COFATTORE