Diagonalizzazione

Problema agli autovalori:

SE ESISTE SI CHIAMA **AUTOVALORE** di **A** RELATIVO ALL'**AUTOVETTORE** v

$$\underbrace{A}_{\in M_n(K)} \cdot \underbrace{\exists ?\, v}_{\in K^n} = \underbrace{\exists ?\, \lambda}_{\in K} \underbrace{v}_{\in K^n}$$

SE ESISTE SI CHIAMA **AUTOVETTORE** di **A** RELATIVO ALL'**AUTOVALORE** λ

Parafrasi: data una matrice **QUADRATA**, che quindi corrisponde ad un **ENDOMORFISMO**, **ESISTONO** delle **DIREZIONI** lungo le quali l'endomorfismo f_A agisce come uno **SCALARE** ?! (ovvero lungo quelle direzioni **RISCALA** semplicemente i vettori anziché cambiarne sia lunghezza sia direzione ?

In altre parole, **ESISTONO DIREZIONI** che vengono **PRESERVATE** dall'endomorfismo f_A ?

Se sì, **QUANTE SONO**? **QUALI SONO** ?

Se sì, ad ogni direzione corrisponde uno scalare λ, questo si vede subito perché se $A.v=\lambda v$ allora $\forall \alpha \in K$ abbiamo che $A.(\alpha v) = \alpha(A.v) = \lambda(\alpha v)$ quindi se vale per v allora vale per tutto lo $\mathrm{Span}(v) := \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$.
Però se trovo una direzione preservata **DIVERSA**, allora ci potrebbe essere un **DIVERSO SCALARE** associato ad esso.

Tra tutte le matrici quadrate, ne esistono alcune di una forma particolare, con le quali rispondere a tutte queste domande è facilissimo?

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

MATRICE DIAGONALE

Allora è chiarissimo che:

$$A \cdot e_i = \lambda_i e_i$$

Quindi IL VETTORE DELLA BASE CANONICA e_i È UN AUTOVETTORE di $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ RELATIVO ALL' AUTOVALORE λ_i, per ogni $i = 1, \dots, n$.

Ma allora se il mondo fosse fatto di sole matrici diagonali, RISOLVERE PROBLEMI AGLI AUTOVALORI sarebbe una passeggiata!

Però così non è.

Ci sono tante matrici quadrate (di gran lunga la maggior parte) che non sono diagonali.

Ma allora tutto è perduto?

In realtà no! Perché può darsi che un ENDOMORFISMO $f: V \to V$ (che abbiamo visto corrispondere alle matrici quadrate una volta che una base di V viene fissata) corrisponda ad una matrice quadrata NON DIAGONALE IN UNA CERTA BASE, MA DIAGONALE IN UNA BASE DIFFERENTE!

Se $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono due basi di V vettoriale su K, sappiamo che l'endomorfismo f si può rappresentare in entrambe le basi con due matrici differenti (ovviamente entrambe quadrate e di ordine uguale alla dimensione di V).
Queste matrici le abbiamo chiamate:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \quad e \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f).$$

Inoltre abbiamo visto esattamente come passare da una base all'altra tramite le matrici $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MATRICE del CAMBIO di BASE da } \mathcal{C} \text{ a } \mathcal{B}}}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)}$ e $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MATRICE del CAMBIO di } \cancel{\text{BASE}} \text{ da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{C}}}{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}$
e abbiamo visto che c'è un'equazione tra tutte queste matrici:

$$\underset{\substack{\| \\ A}}{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)} = \underset{\substack{\| \\ C^{-1}}}{\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)\right)^{-1}} \cdot \underset{\substack{\| \\ B}}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)} \cdot \underset{\substack{\| \\ C}}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)}$$

Possiamo re-interpretare questo fatto come segue:
Se A e B rappresentano un endomorfismo f in due basi diverse, allora $A = {}^{\exists}C^{-1} \cdot B \cdot C$

Questa relazione tra A e B è una relazione di equivalenza!

Def: Siano $A, B \in M_n(K)$. Allora

RICORDA: vuol dire C INVERTIBILE (i.e. $\exists C^{-1}$)

$$A \sim B \iff A = C^{-1} \cdot B \cdot C \quad \exists C \in GL_n(K)$$

Si dice che A e B sono **SIMILI** oppure sono **CONIUGATI**. Invece

$$A \sim_t B \iff A = {}^tC \cdot B \cdot C \quad \exists C \in GL_n(K)$$

USO LA TRASPOSTA ANZICHÉ L'INVERSA

Si dice che A e B sono **CONGRUENTI**.

Lemma: $\sim$, $\sim_t$ **SONO RELAZ. D'EQUIVALENZA**

Se $C \in M_n(K)$ e non in $GL_n(K)$, **NON** FUNZIONEREBBE LA **SIMMETRIA!**

Dim.:

RIFLESSIVITÀ: $A = (Id)^{-1} \cdot A \cdot Id$; ✓ $\quad A = (Id)^t \cdot A \cdot Id$ ✓

SIMMETRIA: $A = C^{-1}BC \Rightarrow C(A)C^{-1} = C(C^{-1}BC)C^{-1} \Rightarrow (C^{-1})^{-1} A C^{-1} = B$ ✓ (è simile per $\sim_t$)

TRANSITIVITÀ: $A = C^{-1}BC,\ B = D^{-1}ED \Rightarrow A = C^{-1}D^{-1}EDC = (DC)^{-1}E(DC)$ ✓

è simile per $\sim_t$ (RICORDA CHE: ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$) $\square$

Lemma: Sia $f \in End(V)$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $A := M_B^B(f)$. Allora
$B \sim A \iff B$ rappresenta $f \in End(V)$.

Dim.: $\Leftarrow$) Facile: B rappresenta $f \in End(V)$ significa che $B = M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(f)$ per una qualche base $\mathscr{C}$ di V, allora $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$ come abbiamo visto dove C è la matrice del cambio di base tra $\mathcal{B}$ e $\mathscr{C}$, quindi B è simile ad A (i.e. $B \sim A$).
$\Rightarrow$) Supponiamo che $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$ $\exists C = (c_{ij})_{i,j} \in GL_n(K)$ allora definiamo $w_j := \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i$ e osserviamo $C = M_B^{\mathscr{C}}(Id_V)$ con $\mathscr{C} := \{w_1, \dots, w_n\}$. Allora per prop sopra $B = M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(f)$. $\square$

Oss: Siccome abbiamo un insieme con una relazione di equivalenza, cioè $(M_n(K), \sim)$, allora possiamo prenderne il **QUOZIENTE**, cioè considerare $M_n(K)/_\sim := \{[A]_\sim$ classi di equivalenza modulo **similitudine** o **coniugio**$\}$

e similmente $M_n(K)/_{\sim_t} := \{[A]_{\sim_t}$ classi di equivalenza modulo **congruenza**$\}$