Il lemma precedente in matematica si legge:

"UN ENDOMORFISMO È UNA CLASSE DI SIMILARITÀ DI MATRICI"

e similmente avremo:

"UNA FORMA BILINEARE È UNA CLASSE DI CONGRUENZA DI MATRICI"

ANCORA NON SAPPIAMO BENE COS'È: LO VEDREMO NELL'UNITÀ 9

Oss: la domanda più importante PERMANE, non è risolta. E cioè: Se parto da $A \in M_n(K)$ non diagonale, e voglio risolvere il problema agli autovalori di A, ora so che che A rappresenta un certo $f \in End(V)$ (i.e. $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ $\exists \mathcal{B}$) e che se trovassimo una base diversa $\mathcal{C}$ tale che $B := M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ è DIAGONALE da una parte risolvere il problema agli autovalori per B è facilissimo e dall'altro $B \sim A$ cioè B è simile ad A ed allora possiamo sperare che la soluzione del problema agli autovalori di A sia la stessa della soluzione al problema agli autovalori di B.

MA QUINDI, QUANDO ESISTE QUESTA BASE $\mathcal{C}$: $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ DIAGONALE?

Def: Come al solito $\dim(V)=n$, $f\in End(V)$, $v\in V$.

i). f **DIAGONALIZZABILE** $\overset{DEF}{\iff}$ $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ DIAGONALE $\exists\, \mathcal{C}$ BASE di V

SE ESISTE SI CHIAMA **BASE DI V CHE DIAGONALIZZA f**

$\Big\Updownarrow$ ESISTE UNA BASE $\mathcal{B}: A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$

A **DIAGONALIZZABILE** $\overset{DEF}{\iff}$ $A\sim B$, $\exists B$ DIAGONALE

ii). $0\neq v$ **AUTOVETTORE** di f $\overset{DEF}{\iff}$ $f(v)=\lambda v$ $\exists \lambda\in K$

$0\neq v$ **AUTOVETTORE** di A $\overset{DEF}{\iff}$ $A.v=\lambda v$ $\exists\lambda\in K$

⚠

È LA STESSA COSA CHE DIRE CHE v È AUTOVETTORE DELL' ENDOMORFISMO L_A.

SE ESISTE SI CHIAMA **AUTOVALORE** di f (OPPURE di A) **RELATIVO ALL' AUTOVETTORE V.**

Lo **SPETTRO** di f (di A) è definito come:

$$Sp(f)=\{\lambda \text{ autovalore di } f\}$$ (e analogamente per una matrice A)

iii). Il POLINOMIO CARATTERISTICO $P_f(t)$ di $f \in End(V)$ nella variabile t è definita come:

SEGUE DALLA DEF DI DETERMINANTE

$$P_f(t) := \det(f - t \cdot Id_V) \in K[t]_{\dim(V)}$$

PER DET(f) SI INTENDE $DET(M_B^B(f))\ \forall B$

Il POLINOMIO CARATTERISTICO $P_A(t)$ di $A \in M_n(K)$ nella variabile t è definita come:

$$P_A(t) := \det(A - t \cdot I_{\dim(V)}) \in K[t]_{\dim(V)}$$

iv). L'AUTOSPAZIO di f relativo all'autovalore λ è definito come

$$V_\lambda(f) := \ker(f - t \cdot Id_V)\big|_{t=\lambda} \subseteq V$$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

PERCHÉ OGNI NUCLEO DI OGNI APPLICAZ. LINEARE È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$$= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

= il sottospazio vettoriale degli autovettori di $\lambda \in K$

[e definizione completamente analoga anche per una matrice A] v). La **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA** $m_a(\lambda, f) \in \mathbb{N}$ dell'autovalore λ di f è definita come

$$m_a(\lambda,f) := \max\left\{ m \in \mathbb{N} \,\middle|\, P_f^{(m-1)}(t)\Big|_{t=\lambda} = 0 \right\}$$

DERIVATA $(m-1)$-ESIMA DEL POLINOMIO $P_f(t)$ NELLA VARIABILE t

La **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA** $m_g(\lambda, f) \in \mathbb{N}$ dell'autovalore λ di f è definita come

$$m_g(\lambda, f) := \dim(\ker(f - \lambda \cdot Id_V))$$

$=$ dimensione dell'autospazio di f relativo all'autovalore λ.

Oss: Nota bene che per definizione un **autovalore** può essere lo scalare nullo, mentre un **autovettore** non può essere il vettore nullo!

Oss.: come mai in def iii). abbiamo potuto scrivere $det(f) := det(M_B^B(f))$ $\forall B$ base di f? E se in basi diverse il determinante fosse diverso? Questo non accade perché IL DETERMINANTE È BEN DEFINITO SULLE CLASSI DI SIMILARITÀ di MATRICI oppure si dice che IL DETERMINANTE PASSA AL QUOZIENTE, MODULO LA RELAZIONE di SIMILARITÀ, che è un altro modo equivalente per dire che ESISTE UNA FUNZIONE

$$\begin{array}{ccccc} det : End(V) & \cong & M_n(K)/\sim & \longrightarrow & K \\ \cup & & \cup & & \\ f_A & \longleftrightarrow & [A] & \longmapsto & det(A) = det(f) \end{array}$$

SIMILARITÀ

LA COSA IMPORTANTE QUI È CHE $det(A)$ NON DIPENDE DAL RAPPRESENTANTE DELLA CLASSE SCELTO!

In altre parole:

$$A \sim B \Longrightarrow det(A) = det(B)$$

Dim.: la dimostrazione segue dal teorema di BINET:
se $A \sim B \Rightarrow A = C^{-1}BC \quad \exists C \in Gl_n(K) \Rightarrow$

$$\det(A) = \det(C^{-1}BC) = \det(C^{-1})\det(B)\det(C)$$
$$= \cancel{\det(C)^{-1}} \cdot \det(B) \cdot \cancel{\det(C)} = \det(B)$$

Oss.:
Dopo tutte queste definizioni, c'è una risposta?
Ovvero, data una $f \in End(V)$ oppure una $A \in M_n(K)$ si può o non si può sapere se f (oppure A) SONO DIAGONALIZZABILI?
Ovvero si può o non si può sapere se $\exists B \in M_n(K)$ tale che $B \sim A$ e B sia diagonale, cioè rappresenti l'endomorfismo f in un'altra base?
Se esiste, esiste una dimostrazione COSTRUTTIVA (I.E. CHE CI DICE COME TROVARE B ESPLICITAMENTE)?

I matematici ci hanno pensato **MOLTO A LUNGO**, e tutt'ora questo problema è così complicato che invece che un'unica elegantissima **RISPOSTA COMPLETA**, abbiamo un intricato insieme di **CRITERI**, ognuno che provvede una **CONDIZIONE SUFFICIENTE** (talvolta anche **NECESSARIA**) sulle matrici o sugli endomorfismi affinché siano **DIAGONALIZZABILI**. Ma non esiste una **CLASSIFICAZIONE COMPLETA** che sia estremamente facile da utilizzare in pratica.

Vediamo i risultati di base sulla diagonalizzazione, ovvero quei **CRITERI** che garantiscono una **CONDIZIONE SUFFICIENTE** [e talvolta anche necessaria] affinché una matrice sia **DIAGONALIZZABILE**.

I criteri che vedremo sono raccolti nelle pagine seguenti:

$\dim(V) = n$ FINITA!

TEOREMA [1° CRITERIO di DIAGONALIZZAZIONE]

$$f \text{ DIAGONALIZZABILE} \iff \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_g(\lambda, f) = \dim(V)$$

SOMMIAMO SU TUTTO LO **SPETTRO** DI f, OVVERO SULL'INSIEME DI TUTTI I SUOI **AUTOVALORI**

TEOREMA [2° CRITERIO di DIAGONALIZZAZIONE]

$$\left.\begin{array}{l} i).\ m_g(\lambda, f) = m_a(\lambda, f) \quad \forall \lambda \in Sp(f) \\ ii).\ P_f(t) \in K[t]_{\dim(V)} \text{ SPEZZA IN FATTORI} \\ \qquad \text{DI GRADO UNO} \end{array}\right\} \iff f \text{ DIAGONALIZZABILE}$$

COR Se $|Sp(f)| = \dim(V) \Rightarrow f$ DIAGONALIZZABILE

(OVVERO SE CI SONO $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim(V)}\}$ AUTOVETTORI)

E QUINDI LE MATRICI ASSOCIATE SONO DIAGONALIZZABILI

TEOREMA [TEOREMA SPETTRALE]

[UNITÀ 10]

$$\left.\begin{array}{l} A \in M_n(K = \mathbb{R}) \\ A \text{ SIMMETRICA} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ DIAGONALIZZABILE}$$

(E QUINDI f_A DIAGONALIZZABILE)

Relazioni di Equivalenza viste nel corso

RELAZ. DI EQUIVALENZA	RAPPRESENTANTI PREFERITI	INSIEME QUOZIENTE	QUANTITÀ INVARIANTI ALL'INTERNO della stessa CLASSE di EQUIVALENZA
EQUIVALENZA MODULO n $a \sim b \iff n \mid a-b$ $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad n \in \mathbb{N}$	L'UNICO RAPPRESENTANTE DELLA CLASSE DI EQUIVALENZA CHE SIA COMPRESO TRA 0 ED $n-1$	$\mathbb{Z}_n := \{[0],[1],\dots,[n-1]\}$	Resto della divisione Euclidea modulo n
EQUIVALENZA GEOMETRICA TRA VETTORI $v \sim w \iff$ v può essere traslato su w mantenendolo parallelo $v,w \in K^n$	L'UNICO RAPPRESENTANTE DELLA CLASSE DI EQUIV. CHE ABBIA LA CODA DEL VETTORE SULL'ORIGINE	VETTORI GEOMETRICI	Verso Direzione Norma
EQUIVALENZA PER OPERAZIONI ELEMENT. TRA MATRICI o SISTEMI LINEARI $A \sim B \iff A$ può essere ottenuta da B tramite operaz. elementari $A,B \in M_{n\times m}(K)$	UNA DELLE INFINITE MATRICI A FORMA SCALA che RAPPRESENTI QUEL SISTEMA LINEARE	SISTEMI LINEARI	Ker = il nucleo ~~Im~~ ← L'IMMAGINE NO rank = il rango
SIMILARITÀ tra MATRICI $A \sim B \iff A = C^{-1}BC$ $A,B \in M_n(K)$ $\quad \exists C \in GL_n(K)$	L'UNICO RAPPRESENTANTE DIAGONALE DELLA CLASSE, SE ESISTE	$End(K^n)$	Ordine, autospazi Determinante Polin. caratteristico Autovettori, autovalori
CONGRUENZA tra MATRICI $A \sim B \iff A = {}^tCBC$ $A,B \in M_n(K)$ $\quad \exists C \in GL_n(K)$	L'UNICO RAPPRESENTANTE DIAGONALE DELLA CLASSE, SE ESISTE	FORME BILINEARI SU K^n	Ordine Forma bilineare associata