



PROP $f \in \text{End}(V)$, $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$.

i). $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ DIAGONALIZZA $f \iff f(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i=1, \dots, n$

ii). f DIAGONALIZZABILE $\iff \exists B = \{v_1, \dots, v_n\} : v_i$ AUTOVETTORE $\forall i$

iii). $\ker(f) = \{0\} \iff 0 \notin \text{Sp}(f)$

iv). L'autovalore λ relativo ad un autovettore v è UNICO.

v). $f(w_i) = \lambda_i w_i$ e λ_i DISTINTI $\forall i=1, \dots, m \Rightarrow \{w_i\}_{i=1, \dots, m}$ LIN. INDIP.

vi). $|\text{Sp}(f)| \leq n$

vii). $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_g(\lambda, f) \leq n$

viii). $\lambda \in \text{Sp}(f) \iff V_\lambda(f) \neq \{0\} \iff P_f(t) \Big|_{t=\lambda} = 0$

NE SEGUE CHE:

$$\begin{cases} m_a(\lambda, f) \geq 1 \\ m_g(\lambda, f) \geq 1 \end{cases}$$

$\lambda \in \text{Sp}(f) \iff P_f(t) \Big|_{t=\lambda} = 0$ SI LEGGE: GLI ZERI DEL POLINOMIO di f
CARATTERISTICO SONO GLI AUTOVALORI di f
SICCOME #ZERI di $P_f(t) \leq \text{ORDINE DI } A_f = n \Rightarrow |\text{Sp}(f)| \leq n \Rightarrow [\text{viii}. \Rightarrow \text{vi}.]. -1-$

Dim.:

i). Se $M_B^B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ DIAGONALE $\Rightarrow f(v_i) = a_{ii} v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i=1, \dots, n$

DEFINE $\lambda_i := a_{ii}$

Se $f(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i \Rightarrow M_B^B(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(K)$.

DEF PRODOTTO RIGA PER COLONNA

ii). Un altro modo di riscrivere il punto i). usando le defniz.

iii). $0_K \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f(\exists v \neq 0) = 0_K \cdot v \Leftrightarrow f(v \neq 0) = 0 \Leftrightarrow \exists v \in \ker(f) \Leftrightarrow \ker(f) \neq \{0\}$

iv). Se $f(v) = \mu v$ e $f(v) = \lambda v \Rightarrow 0 = f(v) - f(v) = (\mu - \lambda) v \Rightarrow \mu = \lambda \in K$

$\neq 0$ AUTOVETTORE

v). [DIM per INDUZIONE su n]. Se $n=1 \Rightarrow$ non c'è nulla da dim. perché ogni autovettore è diverso da zero e quindi LIN. INDIP.

$$\text{Se } \sum_{i=1}^m \mu_i w_i = 0 \Rightarrow 0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^m \mu_i w_i\right) = \sum_{i=1}^m (\mu_i \lambda_i) w_i = 0$$

$$\underbrace{\lambda_m \left(\sum_{i=1}^{m-1} \mu_i w_i\right)}_{=: (2)} = 0 \Rightarrow (2) - (1) : \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m) w_i = 0 \quad =: (1)$$

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva [supponiamo v). VERA per k vettori, dove $k=1, \dots, m-1$] vale l'indipendenza lineare, e quindi

$$(\lambda_i - \lambda_m) c_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, m-1 \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, m-1$$

$\neq 0$ PER IPOTESI
 IN UN CAMPO
 NON CI SONO
 ZERO-DIVISORI

vi). $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = \text{Sp}(f) \xrightarrow{v_i} f(\exists v_i) = \lambda_i v_i$ e $\{v_1, \dots, v_m\}$ LIN. INDIP. $\Rightarrow m \leq \dim(V) = n$

DISTINTI

vii). Ssa $B_i := \{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_g(\lambda_i, f)}\}$ una base di $V_{\lambda_i}(f)$ e dimostriamo che l'unione di tutte queste base v_i è linearmente indipendente, quindi consideriamo:

$$0 = \begin{cases} c_{11} v_{11} + \dots + c_{1,m_g(\lambda_1, f)} v_{1,m_g(\lambda_1, f)} =: w_1 \in V_{\lambda_1}(f) \\ + c_{21} v_{21} + \dots + c_{2,m_g(\lambda_2, f)} v_{2,m_g(\lambda_2, f)} =: w_2 \in V_{\lambda_2}(f) \\ + \vdots \\ + c_{k1} v_{k1} + \dots + c_{k,m_g(\lambda_k, f)} v_{k,m_g(\lambda_k, f)} =: w_k \in V_{\lambda_k}(f) \end{cases}$$

k := |Sp(f)|

$\Rightarrow w_i \in V_{\lambda_i}(f) \quad \forall i$ & $w_1 + \dots + w_m = 0 \Rightarrow w_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, m \Rightarrow c_{i,j} = 0 \quad \forall j=1, \dots, m_g(\lambda_i, f)$

TUTTI DISTINTI

$\Rightarrow \{v_{11}, \dots, v_{1,m_g(\lambda_1, f)}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{k,m_g(\lambda_k, f)}\} =: Z \quad \text{LIN. INDIP.} \Rightarrow n \geq |Z| = \sum_{i=1}^k m_g(\lambda_i, f)$

-3-

$V_{\vec{u}}).$

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow V_\lambda(f) \neq \{0\}:$$

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f(\exists v \neq 0) = \lambda v \Leftrightarrow 0 = f(v) - \lambda v = (f - \lambda \cdot \text{Id}_V)(v)$$

Quindi $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists_{v \neq 0} v \in \ker(f - \lambda \cdot \text{Id}_V) = V_\lambda(f) \Leftrightarrow V_\lambda(f) \neq \{0\}$

$$V_\lambda(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow P_f(t)|_{t=\lambda} = 0:$$

$$V_\lambda(f) \neq \{0\} \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ker(f - \lambda \cdot \text{Id}_V) \neq \{0\} \stackrel{\text{SCORSA LEZIONE}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f - \lambda \cdot \text{Id}_V \text{ NON INIETTIVA} \stackrel{\text{STESSA DIM} \Rightarrow [\text{MONO} \Leftrightarrow \text{EPI} \Leftrightarrow \text{ISO}]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f - \lambda \cdot \text{Id}_V \text{ NON AUTOMORFISMO} \stackrel{\text{QUADRATA INVERTIBILE} \Leftrightarrow \det \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f - \lambda \cdot \text{Id}_V \text{ NON INVERTIBILE} \stackrel{\text{ENDOMORFISMO} = \text{CLASSE DI SIMILARITA' DI MATRICI RAPPRESENT. DA UNA QUALCHE BASE}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow M_B^B(f - \lambda \cdot \text{Id}_V) \text{ NON INVERTIBILE} \exists B \text{ base di } V \text{ (e quindi } \forall B \text{ base di } V)$$

$$\stackrel{\text{INVERT} \Leftrightarrow \det \neq 0}{\Leftrightarrow} \det(M_B^B(f - \lambda \cdot \text{Id}_V)) = 0 \exists B \text{ base di } V \text{ (e quindi } \forall B \text{ base di } V)$$

$$\stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \det(f - \lambda \cdot \text{Id}_V) = 0 \exists B \text{ base di } V \text{ (e quindi } \forall B \text{ base di } V)$$

$$\stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} P_f(t)|_{t=\lambda} = 0.$$

□

$$\dim(V) = n.$$

TEOREMA [1° CRITERIO DI DIAGONALIZZAZIONE]

$$f \text{ DIAGONALIZZABILE} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_g(\lambda, f) = \dim(V)$$

CHE ASSUMIAMO SEMPRE FINITA $(\dim(V) = n)$.

SOMMIAMO SU TUTTO LO SPETTRO DI f , OVVERO SULL' INSIEME DI TUTTI I SUOI AUTOVALORI

Dim.: $\Leftarrow$ Sia B una base per $W := V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(f)$, $k = |\text{Sp}(f)|$.

PER V. SCORSA PROP.

$$\text{quindi } \dim(W) = \sum_{i=1}^k m_g(\lambda_i, f)$$

$$\text{e per ipotesi abbiamo che } \sum_{i=1}^k m_g(\lambda_i, f) = \dim(V) =: n$$

IPOTESI

Quindi ne segue che $\dim(W) = n$, ma siccome $W \subseteq V$ sottospazio

allora dobbiamo avere che $V = W$, $\Rightarrow B$ è anche una base

ii). SCORSA PROP.

per $V \Rightarrow V$ possiede una base di autovettori $\Rightarrow f$ è diagonalizzabile.

$\Rightarrow$ f diagonalizzabile $\Rightarrow \exists B$ diagonalizzante di autovettori di f per l'intero spazio vettoriale V . Allora siano

$\{v_{i,1}, \dots, v_{i,\delta_i}\} \subset B$ l'insieme dei vettori di B

che sono autovettori relativi all'autovalore λ_i (i.e. che appartengono a $V_{\lambda_i}(f)$), e quindi si ha che:

$$\delta_i \leq m_g(\lambda_i, f) \quad \forall i = 1, \dots, k = |Sp(f)|$$

Sommando su tutti gli $i = 1, \dots, k$ si ottiene che:

OGNI AUTOVETTORE È RELATIVO AD UN QUALCHE AUTOVALORE

SOMMANDO SU i

VII). PROP SCORSA

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^k \delta_i = \sum_{i=1}^k m_g(\lambda_i, f) \leq \dim(V)$$

Ne segue che $\sum_{i=1}^k m_g(\lambda_i, f) = n$, e questo conclude la dimostrazione. $\square$

TEOREMA [RELAZIONE TRA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $m_a(\lambda, f)$
& MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $m_g(\lambda, f)$]

$f \in \text{End}(V)$. Allora si ha che:

$$m_g(\lambda, f) \leq m_a(\lambda, f) \quad \forall \lambda \in Sp(f)$$

Dim.: Sra $\{v_1, \dots, v_{m_g(\lambda, f)}\} =: B$ una base di $V_\lambda(f) \subseteq V$.
 Allora **COMPLETIAMO QUESTA BASE** ad una base di V ,
 ottenendo $B_V := \{v_1, \dots, v_{m_g(\lambda, f)}, w_1, \dots, w_n\}$
 È possibile esprimere l'endomorfismo $f \in \text{End}(V)$
 come una matrice quadrata rispetto alla base B_V di V :

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \text{Id}_{V_\lambda} & E \\ 0 & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{QUESTA È L'IDENTITÀ SUL SOTTOSPAZIO } V_\lambda(f) \text{ PER } \lambda & \\ & \text{MATRICE NULLA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \text{ALTRE DUE MATRICI ARBITRARIE DI CUI NON SAPPIAMO MOLTO MA NON IMPORTA} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{M_B^B(f)}(t) &:= \det(M_B^B(f) - t \cdot \text{Id}_V) \\ &\downarrow \\ &= \det((\lambda - t) \cdot \text{Id}_{V_\lambda(f)}) \cdot \det(H - t \cdot \text{Id}_V) \\ &\downarrow \\ &= (\lambda - t)^{m_g(\lambda, f)} \cdot \det(H - t \cdot \text{Id}_V) \end{aligned}$$

Quindi è evidente che la molteplicità di $t = \lambda$ come zero del poly $P_{M_B^B(f)}(t)$ è almeno $m_g(\lambda, f)$. Quindi $m_a(\lambda, f) \geq m_g(\lambda, f) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(f) \quad \square$