COME QUASI SEMPRE

TEOREMA [2° CRITERIO di DIAGONALIZZAZIONE] ($\dim(V)=n$)

$$\left.\begin{array}{l} \text{i). } m_g(\lambda,f)=m_a(\lambda,f) \quad \forall\lambda\in Sp(f) \\ \text{ii). } P_f(t)\in K[t]_{\dim(V)} \text{ SPEZZA IN FATTORI DI GRADO UNO} \end{array}\right\} \Leftrightarrow f \text{ DIAGONALIZZABILE}$$

Dim.:

$\Rightarrow$ Sappiamo che $\deg(P_f(t)) =$ ordine della matrice associata all'endomorfismo f $= \dim(V) = n$ (DEF DI DETERMINANTE (1,2,3).)

e allora il grado del polinomio è esattamente n.

La condizione ii). ci dice esattamente che:

$$P_f(t) \overset{\text{ii}}{=} c\cdot(t-x_1)\cdot(t-x_2)\cdot \ldots\ldots (t-x_N) \qquad x_i\in K \ \ \forall i$$

$$= c\cdot(t-\lambda_1)^{m_a(\lambda_1,f)}\cdot \ldots\ldots \cdot (t-\lambda_k)^{m_a(\lambda_k,f)} \qquad k:=|Sp(f)|$$

$c\in K$

Quindi ne segue che:

$$m_a(\lambda_1,f)+\ldots+m_a(\lambda_k,f)=\sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i,f)=\dim(V)$$

$$\underset{\text{TEOREMA SCORSO}}{\geq} m_g(\lambda_1,f) \qquad \underset{\text{TEOREMA SCORSO}}{\geq} m_g(\lambda_k,f) \qquad \underset{\text{TEOREMA SCORSO}}{\geq} \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i,f)$$

Ma se per ipotesi $m_g(\lambda_i, f) = m_a(\lambda_i, f) \quad \forall i = 1, \dots, k = |Sp(f)|$

allora $\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f) = \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i, f) = \dim(V) \xRightarrow[\text{DIAGONALIZ.}]{\text{CRITERIO 1}} f$ diagonalizzabile.

$\Leftarrow$ f diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f) = n \\ \quad \wedge\!\!/ \\ \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i, f) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i, f) = n$ (B)

$\| $ (A)

$\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f)$

Il punto (B), siccome $m_g(\lambda_i, f) \leq m_a(\lambda_i, f)$, implica che $m_g(\lambda_i, f) = m_a(\lambda_i, f) \quad \forall i = 1, \dots, k = |Sp(f)|$ ← OVVERO PROPRIETÀ i).

Il punto (A), siccome $\sum_{i=1}^{n} m_a(\lambda_i, f) = n$, vuol dire che

$$P_f(t) = \overset{\neq 0}{c} \cdot (t - \lambda_1)^{m_a(\lambda_1, f)} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)^{m_a(\lambda_k, f)} \in K[t]_{\dim(V)}$$

$c \in K$

FATTORIZZA IN POLINOMI DI GRADO UNO! CIOÈ LINEARI!

e quindi $P_f(t)$ deve spezzare in fattori di grado uno, cioè in un prodotto di polinomi lineari a coefficienti nel campo K. $\square$

SE PER ASSURDO AVESSE FATTORIZZATO IN POLINOMI DI GRADO UNO E ANCHE UN SOLO SINGOLO FATTORE DI GRADO DUE $\Rightarrow$ LA SOMMA DEGLI ESPONENTI SUBITO SI SAREBBE RIDOTTA AD UN NUMERO STRETTAMENTE MINORE DI n

Esempi:

1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(K=\mathbb{R})$ allora calcoliamo il suo polinomio caratteristico.

$$P_A(t) := \det(A - t \cdot I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & -1-t \end{pmatrix}\right) = -(1-t)(1+t) - 2 \cdot 3$$

$$= (t^2-1) - 6 = t^2 - 7$$

$$= (t-\sqrt{7})^1 \cdot (t+\sqrt{7})^1$$

$\Rightarrow Sp(f) = \{\lambda_1 = -\sqrt{7}, \lambda_2 = \sqrt{7}\}$ con:

$$m_a(-\sqrt{7}, f) = 1 \quad , \quad m_a(\sqrt{7}, f) = 1$$
$$\geq \qquad\qquad\qquad \geq$$
$$m_g(-\sqrt{7}, f) \qquad\qquad m_g(\sqrt{7}, f)$$

Da cui segue che $m_g(\lambda_1) = m_a(\lambda_1)$ e $m_g(\lambda_2) = m_a(\lambda_2)$.

È che quindi:

i). $m_g(\lambda, f) = m_a(\lambda, f) \quad \forall \lambda \in Sp(f) = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

ii). $P_f(t) \in \mathbb{R}[t]_2$ SPEZZA IN FATTORI DI GRADO UNO

e questo è vero perché

POLINOMI DI GRADO UNO

$$P_f(t) = t^2 - 7 \underset{\text{IN } \mathbb{R}}{=} \underbrace{(t-\sqrt{7})^1}\cdot\underbrace{(t+\sqrt{7})^1} \in \mathbb{R}[t]_2$$

DUE FATTORI DI GRADO UNO, CIOÈ POLINOMI LINEARI A COEFFICIENTI NEL CAMPO DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$

Se invece adottassimo un campo con meno elementi?
Per esempio se adottiamo $K = \mathbb{Q}$ invece che $K = \mathbb{R}$, allora:

$$P_f(t) = t^2 - 7 \in \mathbb{Q}[t]_2$$ NON SPEZZA IN FATTORI LINEARI!

PERCHÉ PER SPEZZARE CI SERVIREBBE L'ELEMENTO $\sqrt{7}$, MA IN $\mathbb{Q}$ NON CE L'ABBIAMO.

Siccome il **SECONDO CRITERIO** dà una condizione sia necessaria che sufficiente, e $P_f(t)$ spezza in $\mathbb{R}$ ma non spezza in $\mathbb{Q}$, questo significa che:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **È DIAGONALIZZABILE SE $K=\mathbb{R}$** (È QUINDI ANCHE PER $\mathbb{C}$)
E NON È DIAGONALIZZABILE SE $K=\mathbb{Q}$.

Avremmo potuto utilizzare il **PRIMO CRITERIO** invece che il secondo?
Certo: basta calcolare $\dim(V_{\lambda_1=-\sqrt{7}}(f))$ e $\dim(V_{\lambda_2=\sqrt{7}}(f))$
Dal teorema delle dimensione per applicazioni lineari:

$$\underset{\substack{\| \\ m_g(-\sqrt{7},f)}}{\dim(V_{-\sqrt{7}}(f))} = \dim(\ker(f+\sqrt{7}\cdot I_2)) = \underbrace{\dim(V)}_{=2} - \overbrace{\dim(\operatorname{Im}(f+\sqrt{7}\cdot I_2))}^{=\operatorname{rank}(A+\sqrt{7}\cdot I_2)}$$

$$= 2-\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{7}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2-\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1+\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$R_1 \mapsto (1-\sqrt{7})\cdot R_1$

$$= 2-\operatorname{rank}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7}) & 2(1-\sqrt{7}) \\ 3 & -(1-\sqrt{7}) \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} 2 - \operatorname{rank}\underbrace{\begin{pmatrix} -2\cdot 3 & -2\cdot(\sqrt{7}-1) \\ 1\cdot 3 & 1\cdot(\sqrt{7}-1)\end{pmatrix}}_{=1 \text{ PERCHÉ } R_1 = -2\cdot R_2} = 1$$

Nello stesso modo si vede che $\dim(V_{+\sqrt{7}}(f)) = 1 =: m_g(\sqrt{7}, f)$

E quindi mettendo tutto insieme si ha che:

$$\underbrace{m_g(-\sqrt{7}, f)}_{=1} + \underbrace{m_g(\sqrt{7}, f)}_{=1} = \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f) = 2 = \dim(V)$$

e quindi anche usando il **PRIMO CRITERIO** si ha che f è **DIAGONALIZZABILE** (i.e. A **DIAGONALIZZABILE**) **sul campo** $K = \mathbb{R}$.

In effetti l'operazione elementare $R_1 \mapsto (1-\sqrt{7})\cdot R_1$ **non è permessa** a meno che lo scalare $(1-\sqrt{7})$ non appartenga al campo K, quindi non ci sono problemi su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$, ma su $\mathbb{Q}$ quell'operazione non esiste.

Ora che abbiamo trovato la dimensione degli autospazi $V_{\sqrt{7}}(f)$ e $V_{-\sqrt{7}}(f)$, andiamo a descriverli precisamente

$$V_{\sqrt{7}}(f) := \ker\left(f - \sqrt{7}\cdot Id_V\right) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1-\sqrt{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \right)$$

RISOLVENDO IL SISTEMA LINEARE PER ESEMPIO CON GAUß E POI SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

$V_{\sqrt{7}}$ UN AUTOVETTORE dell' AUTOVALORE $\sqrt{7}$ CE NE SONO INFINITI PROPORZIONALI.

$V_{-\sqrt{7}}$ UN AUTOVETTORE di $-\sqrt{7}$

Nello stesso modo si trova:

$$V_{-\sqrt{7}}(f) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{7} \end{pmatrix} \right)$$

Adesso definiamo la matrice di cambiamento di base come la matrice data dagli autovettori sulle colonne:

$$C := \left(v_{\sqrt{7}}, v_{-\sqrt{7}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+\sqrt{7} & -1-\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Calcolando l'inversa di C con l'algoritmo di Gauß oppure con il metodo della matrice cofattrice si trova:

$$C^{-1} = \frac{1}{4\cdot\sqrt{7}}\begin{pmatrix} \sqrt{7}+1 & 2 \\ \sqrt{7}-1 & -2 \end{pmatrix}$$

E quindi mettendo tutto insieme si trova:

$$\underbrace{\frac{1}{4\cdot\sqrt{7}}\begin{pmatrix} \sqrt{7}+1 & 2 \\ \sqrt{7}-1 & -2 \end{pmatrix}}_{=\, C^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=\, A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+\sqrt{7} & -1-\sqrt{7} \end{pmatrix}}_{=\, C} = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$$

Questo conferma che

$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{7} \end{pmatrix} \right\}$ È UNA BASE di V DIAGONALIZZANTE PER $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(E QUINDI PER $f \in \mathrm{End}(V)$ ASSOCIATO AD $A \in M_2(\mathbb{R})$)

Esempio:

In modo simile se $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ allora abbiamo che

$$P_t(A) := \det(A - t \cdot I_2) = \det\begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

NON SPEZZA!
$\Rightarrow$ NON DIAGONALIZZAB.

Allora su $K = \mathbb{R}$, $P_t(A)$ rimane: $P_t(A) = t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]_2$
mentre per $K = \mathbb{C}$, $P_t(A)$ diventa: $P_t(A) = (t - i)^1 (t + i)^1 \in \mathbb{C}[t]_2$

SPEZZA E
$1 = m_g(\pm i, A) = m_a(\pm i, A)$
QUINDI È PER CRITERIO 2° DIAGONALIZZABILE

Quindi $Sp(A) = \{-i, +i\}$
e calcoliamo come prima:

$$\begin{cases} V_i(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right) \\ V_{-i}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}}_{\mathcal{C}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_{\mathcal{C}} = \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{\mathrm{diag}(i, -i)}$$

D: Ma perché dobbiamo definire la matrice del cambio base C con le colonne in quell'ordine e non in un **ORDINE DIVERSO**?

R: Non c'è nessun problema! L'ordine si può cambiare e non c'è ragione di preferire un ordine ad un altro.

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{= C^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_{= C} = \underbrace{\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}_{= \operatorname{diag}(-i, i)}$$

ABBIAMO SCAMBIATO L'ORDINE DEGLI **AUTOVETTORI COLONNA** E COME CONSEGUENZA SI È SCAMBIATO ANCHE L'ORDINE DELLA MATRICE **DIAGONALIZZATA**

Esempio: Non è necessariamente vero che le matrici **NON DIAGONALIZZABILI** non si possono diagonalizz. perché il **CAMPO** non contiene abbastanza numeri e deve essere ampliato al campo dei numeri complessi!
Esistono alcune matrici che **NON SONO DIAGONALIZZABILI** sostanzialmente in nessun campo. Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2 = (t-0)^{2 = m_a(0,A)}$$

$\Rightarrow Sp(A) = \{\lambda_1 = 0\}$ ovvero abbiamo **UN UNICO AUTOVALORE** che è l'**AUTOVALORE NULLO**, di molteplicità algebrica $= 2$.
Vediamo la molteplicità geometrica:

$$m_g(0,A) := \dim(\ker(A - (\lambda=0)\cdot I_2)) = \dim(\ker(A))$$

$$= \dim\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \dim\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in K\right\}$$

$$= 1$$

Quindi si vede subito che:

$$m_g(\lambda_1 = 0, A) = 1 \underset{\neq}{<} 2 = m_a(\lambda_1 = 0, A)$$

E quindi usando il primo criterio per la diagonalizz si può subito concludere che:

A NON È DIAGONALIZZABILE

E questa proprietà non dipende in modo particolare dal campo K scelto!

D: Ma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile! Non è che tutte le diagonaliz. devono essere invertibili per caso?

R: No!

Esempio / Esercizio:

1. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ INVERTIBILE E NON DIAGONALIZZABILE

2. $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ NON INVERTIBILE E DIAGONALIZZABILE

3. $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ NON INVERTIBILE E NON DIAGONALIZZABILE

4. $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ INVERTIBILE E DIAGONALIZZABILE (GIÀ DIAGONALE)