Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 8 - Calcolo di limiti e asintoti - 17/11/2025

Richiamo (determinare gli asintoti di una funzione)

Diciamo che f ha

- asintoto verticale $x = x_0 \in \mathbb{R}$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ⟵ ($+\infty$ oppure $-\infty$)

  ↳ si parla di asintoto verticale destro se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

  e di asintoto verticale sinistro se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

- asintoto orizzontale $y = y_0 \in \mathbb{R}$ a $+\infty$ se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$

  " " " a $-\infty$ se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$

- asintoto obliquo $y = mx + q$ $(m \neq 0,\ q \in \mathbb{R})$ a $+\infty$ se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q$

  " " " a $-\infty$ se $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q$

N.B

- Ha senso studiare $\lim_{x \to x_0} f(x)$ se $x_0 \notin \operatorname{dom} f$ ed è un punto di accumulazione

- Ha senso studiare $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ se f è ben definita in questi intorni di $+\infty$ o $-\infty$.

- Se f ha as. orizz. a $+\infty$, sicuramente non ha as. obliquo a $+\infty$.

  " " a $-\infty$, " " a $-\infty$.

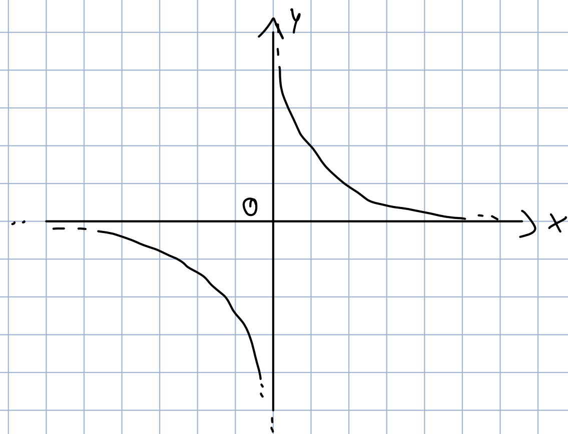
Esempi

- $f(x) = \frac{1}{x}$

$\text{dom} f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ → $x = 0$ non è nel dominio quindi è interessante studiare il limite $\lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste, ma $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

quindi $x = 0$ è asintoto verticale.



Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale.

- $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$, $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ → $x = 0$ as. verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

→ no as. orizzontali

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 + 1}{x^2} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\cancel{x} + \frac{1}{x^2} - \cancel{x} \right] = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

→ $y = x$ è asintoto obliquo.

ESERCIZI

Es. 1 (14/06/2022)

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(3 + \operatorname{sen} x)}{x}$ ii) $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$ iii) $\lim_{x \to +\infty} x\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Es. 2 (22/02/2024 A)

i) $\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{\log(x^3)\log(x^4)}$ ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\left[x^{-x} - x^{-1}\right]^2}{2^{-x} - 3x^{-2}}$

Es. 3

Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.

Es. 4

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + x + 1}\right)$$

Es. 5 (24/01/2023)

i) $\lim_{x \to \pi^+} (x - \pi)\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 2x - 3}{1 - 5x^4} \log\left(e^x - 1\right)$

Es. 6 (14/06/2024)

Si studi la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$$

determinando i) dominio, ii) simmetrie, iii) segno, iv) intersezioni con gli assi, v) limiti agli estremi del dominio / asintoti

SVOLGIMENTI

Es. 1

i) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(3+\operatorname{sen} x)}{x}$$

Indipendentemente dall'argomento, abbiamo

$$-1 \leqslant \cos(3+\operatorname{sen}x) \leqslant +1 \implies -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos(3+\operatorname{sen}x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

$$\implies \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(3+\operatorname{sen}x)}{x} = 0$$ dal Teorema del confronto

ii) $$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1-(3^x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2^x-1}{x} - \frac{3^x-1}{x}\right] = \log 2 - \log 3$$

iii) $$\lim_{x\to+\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\cancel{x^2}-(\cancel{x^2}-1)\right]}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

Es. 2

i) $$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{\log(x^3)\log(x^4)} \underset{\text{proprietà log}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{12\log^2(x)} \underset{t=x-1}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi t+\pi)}{12\log^2(1+t)} =$$

proprietà log

$t = x-1$
per ricondurci a limiti notevoli con $t\to 0$

$\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\implies \operatorname{sen}^2(\alpha+\pi) = \operatorname{sen}^2\alpha$
$\forall\alpha$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi t)}{12\log^2(1+t)} = \frac{\pi^2}{12}\lim_{t\to 0} \Bigg(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}}_{\to 1}\Bigg)^2 \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{t}{\log(1+t)}}_{\to 1}\Bigg)^2 = \frac{\pi^2}{12}$$

ii) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[x^{-x}-x^{-1}\right]^2}{2^{-x}-3x^{-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\frac{1}{x^x}-\frac{1}{x}\right]^2}{\frac{1}{2^x}-\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\frac{x-x^x}{x^{x+1}}\right]^2}{\frac{x^2-3\cdot 2^x}{2^x\cdot x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-2x^{x+1}+x^{2x}\right)}{x^{2x}\cdot \cancel{x^2}} \cdot \frac{2^x\cdot \cancel{x^2}}{\left(x^2-3\cdot 2^x\right)} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2x}\cdot 2^x}{-3x^{2x}\cdot 2^x} = -\frac{1}{3}$$

riconosciamo i termini
più importanti per
$x\to+\infty$ al num.
e al denom.

→ si può vedere subito che il limite è $-\frac{1}{3}$ guardando subito la gerarchia di infiniti/infinitesimi: se per $x\to+\infty$ $\quad x < x^2 < \underline{2^x < x^x}$ $\;\to \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\log x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(\log x-1)} = +\infty$

allora vale anche $\quad x^{-x} < 2^{-x} < x^{-2} < x^{-1}$

quindi $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[x^{-x}-x^{-1}\right]^2}{2^{-x}-3x^{-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[-x^{-1}\right]^2}{-3x^{-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-2}}{-3x^{-2}} = -\frac{1}{3}$$

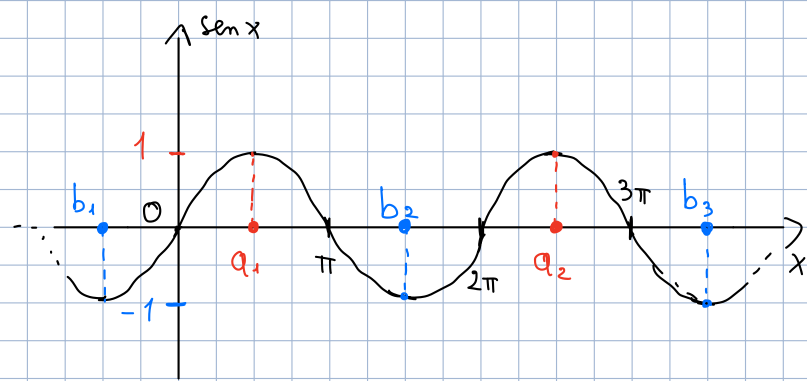
Es. 3

Per dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$, basta trovare 2 successioni per cui il limite, ristretto alle successioni, sia diverso.

Definiamo

$a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$b_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k\in\mathbb{N}$



Tali che $\operatorname{sen}(a_k) = 1 \;\; \forall k\in\mathbb{N}$ e $\operatorname{sen}(b_k) = -1 \;\; \forall k\in\mathbb{N}$ e $\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = +\infty$

Se $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ esistesse, sarebbe uguale anche ristretto a qualsiasi successione $x_k \to +\infty$, ovvero

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = \lim_{k\to+\infty} \operatorname{sen}(a_k) = \lim_{k\to+\infty} 1 = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = \lim_{k\to+\infty} \operatorname{sen}(b_k) = \lim_{k\to+\infty} (-1) = -1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$.

Es. 4

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)$$

Se abbiamo differenze di radici quadrate sfruttiamo la formula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, moltiplicando e dividendo per $a+b$.
Con una differenza di radici cubiche dobbiamo invece sfruttare $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, moltiplicando e dividendo per a^2+ab+b^2. Dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+x+1)}+\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+x+1)}+\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+\cancel{1}-\cancel{x^2}-x-\cancel{1}}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+x+1)}+\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+x^3+x^2+x^2+x+1}+\sqrt[3]{x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x}}$$

per $x\to+\infty$ il termine con la potenza più alta è l'unico che conta!
Formalmente, dovremmo mettere in evidenza x^4 dentro la radice e quindi portare fuori $x^{4/3}$, mentre tutti gli altri addendi tendono a zero.

$$=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{3x^{4/3}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{3x^{1/3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}=0$$

Es. 5

i) $$\lim_{x\to\pi^+}(x-\pi)\,\mathrm{Tan}\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{t\to 0^+} t\cdot \underbrace{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$t = x - \pi$

$$= \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{-\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} - t\,\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} = \lim_{t\to 0^+} -2\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\frac{t}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}_{\to 1} = -2$$

ii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x-3}{1-5x^4}\,\underbrace{\log\left(e^x-1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x-3}{1-5x^4}\left(x+\log(1-e^{-x})\right)$$

$$= \log\left[e^x(1-e^{-x})\right]$$

$$= \log(e^x)+\log(1-e^{-x}) = x+\log(1-e^{-x})$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\boxed{\frac{x^4+2x^2-3x}{1-5x^4}}}_{\to -\frac{1}{5}} + \underbrace{\boxed{\frac{x^3+2x-3}{1-5x^4}}}_{\to 0}\,\underbrace{\boxed{\log(1-e^{-x})}}_{\to 0}\right] = -\frac{1}{5}+0 = -\frac{1}{5}$$

Es. 6

i) Dominio:

$$e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$$

Sostituiamo $t = e^{x}$ $\Rightarrow$ $t^2 - t + 1 > 0$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$\hookrightarrow$ l'eq. associata non ha sol. reali, quindi la diseq. è soddisfatta $\forall\, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\text{dom} f = \mathbb{R}$

ii) Simmetrie:

$$f(-x) = \log\left(e^{-2x} - e^{-x} + 1\right) \begin{cases} \to \neq f(x) \\ \to \neq -f(x) \end{cases}$$

$\to$ nessuna simmetria rilevante

iii) Segno:

$$f(x) \geq 0 \iff \log\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right) \geq 0 \iff e^{2x} - e^{x} \cancel{+1} \geq \cancel{1}$$

$$\iff e^{2x} - e^{x} \geq 0$$

Sostituiamo $t = e^{x}$ $\to$ $t^2 - t \geq 0$

$$t(t-1) \geq 0 \iff t \leq 0 \vee t \geq 1$$

$$\iff e^{x} \leq 0 \quad \vee \quad e^{x} \geq 1$$

impossibile

$\hookrightarrow x \geq 0$

Dunque $f(x) \geq 0$ se $x \geq 0$ (in particolare $f(x) = 0$ per $x = 0$)

$f(x) < 0$ se $x < 0$

iv) Intersezione assi: Dal punto precedente $\rightarrow f(x) = 0 \iff x = 0$

v) • $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log(e^{2x} - e^{x} + 1) = \lim_{x \to +\infty} \log\left[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\log(e^{2x}) + \log(1 - e^{-x} + e^{-2x})\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{2x}_{\to +\infty} + \underbrace{\log(1 - e^{-x} + e^{-2x})}_{\to 0}\right] = +\infty$$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \log(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[2 + \underbrace{\frac{\log(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x}}_{\to 0}\right] = 2$$

• $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \dots = \lim_{x \to +\infty} \log(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 0$

$\Rightarrow$ la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo destro (destro $\leftrightarrow$ a $+\infty$)

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log(\underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \underbrace{e^{x}}_{\to 0} + 1) = \log(1) = 0$

$\Rightarrow$ la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro (sinistro $\leftrightarrow$ a $-\infty$)

Accenniamo un grafico con gli elementi a disposizione:

per concludere abbiamo bisogno delle derivate