# §.10. SINGOLARITÀ di curve IRRIDUCIBILI & RAZIONALITÀ

**THM** [STIMA # PUNTI SINGOLARI per curve IRRID.]

OVVERO $\mathbb{Z}_P(F)$ INTEGRALE, CIOÈ IRRIDUCIBILE E RIDOTTA

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ IRRID.} \\ \deg(F) =: d \geq 2 \\ \operatorname{Sing}(F) = \{P_1, \dots, P_s\} \\ \text{molteplicità} = m_1 \dots m_s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} \leq \binom{d-1}{2}}$$

SE PREFERITE POTETE $\cdot/2$

**COR** $\begin{cases} m_i = 2 \;\; \forall i=1,\dots,s \implies s \leq \binom{d-1}{2} \\ m_i = d-1 \;\; \exists i \implies s = 1 \;\&\; i = 1. \end{cases}$

**RECALL:** (CAP. 8.)

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } F \text{ RIDOTTA} \\ \text{ma non necessariamente} \\ \text{IRRID.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} \leq \binom{d}{2} \quad \left[\text{in particolare } s \leq \binom{d}{2}\right]$$

Dim.: [Metodo delle curve aggiunte di $\deg = d-1$]

$$\Lambda := \{\text{curve } \deg = d-1 \text{ aventi } P_i \text{ con molt. } m_i - 1 \ \forall i\}$$

Intanto $\Lambda \neq \emptyset$ perché $[\partial_{x_i} F] \in \Lambda$ $\forall i = 1,2,3$. Calcoliamo $\operatorname{codim}(\Lambda)$.

Osserviamo che

$$[G] \in \Lambda \iff (\partial_{\vec{x}} G)(P_i) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, s$$

vettore di lunghezza $m_i - 2$ senza che l'ordine sia importante

Esempio: $\vec{x} = (x_0, x_0, x_0, x_2, x_1, x_1, x_2, x_2, x_1, x_1, x_1)$

si può riscrivere come

$(x_0^3 \ x_1^5 \ x_2^3) \leftarrow \underbrace{\partial_{x_0}\partial_{x_0}\partial_{x_0}}_{3} \underbrace{\partial_{x_1} \cdots \partial_{x_1}}_{5} \underbrace{\partial_{x_2}\partial_{x_2}\partial_{x_2}}_{3}$

Sono tutte le derivate parziali $\left(\partial_{x_0}^{a_0} \circ \partial_{x_1}^{a_1} \circ \partial_{x_2}^{a_2} G\right)(P_i)$

$$a_0 + a_1 + a_2 = m_i - 2$$

Quante sono? Li abbiamo contati con il metodo combinatorico di STARS & BARS e sono quindi $\binom{m_i - 2 + \#\text{VARIAB} - 1}{\#\text{VARIAB.} - 1} = \binom{m_i - 2 + 2}{2} = \binom{m_i}{2}$

Questo vale $\forall i=1,\dots,s$ allora le condizioni sulle derivate parziali sono $\sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2}$, bisogna vedere se sono tutte linearmente indipendenti oppure no.

Ma è scontato che la condizione $G(P_i)=0$ sia già contata?
Per Eulero $\left(\sum_{i=0}^{n=2} x_i \partial_{x_i} H\right)(P) = \deg(H)\cdot H(P)$

BASTA PRENDERE H COME $(m_i-3)$-ESIMA DERIVATA
$\rightsquigarrow$ PER EULERO IL FATTO CHE TUTTE LE DERIVATE $(m_i-2)$-ESIME SI ANNULLINO IN P IMPLICA CHE TUTTE LE DERIVATE $(m_i-3)$-ESIME SI ANNULLINO IN P $\forall i=1,\dots,s$ $\rightsquigarrow$ PER INDUZIONE $G(P_i)=0$ $\forall i=1,\dots,s$

Quindi non dobbiamo aggiungere $G(P_i)=0$ come condizioni.
Allora

F IRRID $\Downarrow$ $Z_P(F)$ RIDOTTA $\Downarrow$ CAP. 8.

$$\underbrace{\#\text{cond. lin. indip.}}_{=\operatorname{codim}(\Lambda)} \leq \sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2} \leq \binom{d}{2}$$

Quindi:

$$\dim(\Lambda) = N(d-1,2) - \operatorname{codim}(\Lambda) \geq \frac{(d-1)(d+2)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d-1 \geq 1$$

Se tutte le condizioni sulle derivate parziali che abbiamo imposto fossero LIN. INDIP. avremmo

$$\dim(\Lambda) = \underbrace{N(d-1,2) - \sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2}}_{=:t}$$

Siccome $\operatorname{codim}(\Lambda) \leq \sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2} \Rightarrow \dim(\Lambda) \geq t \Rightarrow$ posso **AGGIUNGERE ULTERIORI $t$ PUNTI** $Q_1, \dots, Q_t \in Z_P(F)$ [chiaramente distinti e diversi dai punti $P_i$] come **CONDIZIONI di PASSAGGIO.**

$$\Lambda' := \Lambda \cap \text{Luogo di curve per } Q_1, \dots, Q_t$$

Quindi $\dim(\Lambda') \geq 0 \Rightarrow \exists$ sia $[G] \in \Lambda' \Rightarrow Z_P(F) \cap Z_P(G) \supseteq \{P_i, Q_j\}$ $\forall i = 1, \dots, s$, $\forall j = 1, \dots, t$

in particolare $\Lambda' \neq \phi$ altrimenti la dimensione sarebbe negativa

Ma $\left.\begin{array}{l} \deg(F) = d \text{ IRRID.} \\ \deg(G) = d-1 \\ \Rightarrow \text{no fattori comuni} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Bezout}}$

$$d(d-1) = \sum_{R \in Z_P(F) \cap Z_P(G)} I_R(F,G) \geq$$

$$\geq \underbrace{\sum_{i=1}^{s} I_{P_i}(F,G)}_{\geq \sum_{i=1}^{s} m_i(m_i - 1)} + \underbrace{\sum_{j=1} I_{Q_j}(F,G)}_{\geq t}$$

Quindi abbiamo ottenuto che:

$$d(d-1) \geq \sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) + t \overset{\text{def di } t}{=} 2\sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2} + N(d-1,2) - \sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2} + \frac{(d-1)(d+2)}{2}$$

In conclusione

$$\sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2} \leq \frac{2d(d-1)-(d-1)(d+2)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \binom{d-1}{2} \qquad \square$$

$\boxed{\text{OSS}}$ Questo bound è sharp [i.e. $\exists$ almeno una curva che realizza l'uguaglianza]

"stima" "ottimale"

Per esempio le curve della forma $\underbrace{F_d(x_1,x_2)}_{\text{omogeneo di deg} = d} + x_0 \cdot \underbrace{F_{d-1}(x_1,x_2)}_{\text{omogeneo di deg} = d-1} = 0$

SENZA FATTORI COMUNI

Allora queste sono curve IRRID. con un solo punto singolare $(s=1)$ in $P_1 = (1:0:0)$ con $m_1 = d-1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s}\binom{m_i}{2} = \binom{m_1}{2} = \binom{d-1}{2} \leq \binom{d-1}{2}$$

VALE L'UGUAGLIANZA

Possiamo sfruttare questo principio per ottenere un

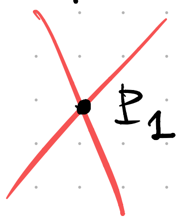
**CRITERIO di RIDUCIBILITÀ:**

$Z_P(F)$ RIDOTTA con $S := |\mathrm{Sing}(F)| > \binom{d-1}{2} \Rightarrow F$ RIDUCIBILE

**Esempio:**

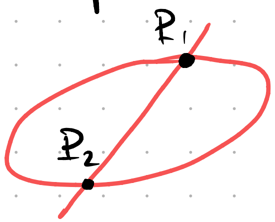
$d=2$: $F$ IRRID $\Rightarrow S \leq \binom{1}{2} = 0 \Rightarrow \mathrm{Sing}(F) = \emptyset$

Quindi il criterio di riducibilità ci dice che una **conica** con almeno 1 punto singolare dev' essere riducibile e quindi




$d=3$: $F$ IRRID $\Rightarrow S \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Sing}(F) \subseteq \{P_1\}$

Quindi il criterio di riducibilità ci dice che una **cubica** con almeno 2 punti singolare dev' essere riducibile e quindi




oppure