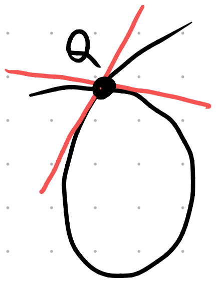
§ 10.2 Genere geometrico & curve razionali

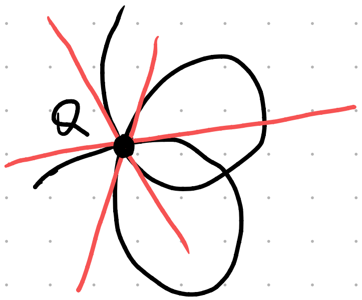
DEF Q singolare $(m(Q) \geq 2)$ di una curva RIDOTTA $Z_P(F)$ è una **SINGOLARITÀ ORDINARIA** $\overset{\text{DEF}}{\iff}$ il cono tangente consiste di m rette tangenti distinte, e **CUSPIDE ORDINARIA** $\overset{\text{DEF}}{\iff}$ il cono tangente consiste di un'**unica** tangente L e si ha:

$$I_Q(F, L) = m+1$$

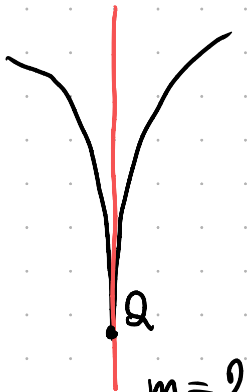
Esempi:



$m=2$



$m=2$



$m=2$

CUSPIDE

$$y^2 - x^3 = 0$$

$$L: y = 0 \longrightarrow x^3 = 0$$

cioè F IRRID., cioè $Z_P(F)$ INTEGRALE

DEF $Z_P(F)$ IRRID & RIDOTTA con singolarità/cuspidi ordinarie come sole singolarità, allora il **GENERE GEOMETRICO** di $Z_P(F)$ è

$$g := \binom{d-1}{2} - \sum_{i=1}^{s=|Sing(F)|} \binom{m_i}{2} \geq 0$$

PER IL TEOREMA DELLA STIMA SOPRA

- $Z_P(F)$ **CURVA RAZIONALE** $\overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$ $g=0$

OSS
- $Z_P(F)$ LISCIA $\Rightarrow g(Z_P(F)) = \binom{d-1}{2}$ LE SINGOLARITÀ NON CONTRIBUISCONO
- $Z_P(F)$ RAZIONALE $\Rightarrow \sum \binom{m_i}{2} = \binom{d-1}{2}$ CONTRIBUTO MASSIMO DELLE SINGOLARITÀ
- $d=2$ (CONICHE) $\Rightarrow \binom{d-1}{2} = 0 \Rightarrow \binom{m_i}{2} = 0 \ \forall m_i \Rightarrow Sing(F) = \emptyset$
  $\Rightarrow Z_P(F)$ LISCIA

  Conclusione: tutte le coniche singolari non sono integrali quindi o sono non ridotte (per esempio la retta doppia) o sono riducibili (per esempio due rette distinte)
  (anche per $d=1$ ma banale)

- $d>2$ ogni curva razionale è singolare

Esempio: $Z_p(F)$ RAZIONALE. $\vec{m} = (m_1, \dots, m_s)$

$\vec{m} = (2)$

- **d=3** $\sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} = 1 \Rightarrow$ l'unica possibilità è $\mathrm{Sing}(F) = \{Q\}$, $m(Q) = 2$.
- **d=4** $\sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \vec{m} = (3) \\ \bullet\ \vec{m} = (2,2,2) \end{cases}$
- **d=5** $\sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} = 6 \Rightarrow$
  - $\vec{m} = (4)$
  - $\vec{m} = (3,3)$
  - $\vec{m} = (2,2,2,2,2,2)$

Esempio (d=3 ma nel dettaglio):

$\exists !\, Q$ sing con $m(Q) = 2$,

$\Lambda_2 = \{$coniche passanti per Q con molt $= m-1 = 1$ e passanti per ulteriori $2d-3 = 3$ punti semplici $Q_1, Q_2, Q_3\}$

curve aggiunte di grado $d-1=2$

$= \{$coniche per quattro punti$\}$

ma siccome $Z_{\mathbb{P}}(F)$ IRRID i quattro punti non possono essere allineati (per esercizio), ma 3 allineati Q_1, Q_2, Q_3 sì, e in ogni caso Λ_2 è un fascio di coniche con conica generica che interseca $Z_{\mathbb{P}}(F)$ in Q con molteplicità $\geq m_1(m_1-1) = 2$ e molteplicità uno per i Q_j $j=1,2,3$.

Es: $F = x_0x_2^2 - x_1^3 \Rightarrow C := Z_{\mathbb{P}}(F)$ con cuspide il punto $Q = (1:0:0)$ e scegliamo

$$Q_1 := (0:0:1) \qquad Q_2 := (1:1:1) \qquad Q_3 := (1:1:-1)$$

tutti e tre stanno sulla retta $x_1 - x_0 = 0$. Λ_2 è un fascio degenere perché per Bézout tutte le sue coniche contengono la componente $Z_{\mathbb{P}}(x_1 - x_0)$ e hanno una retta variabile $t_0x_1 + t_1x_2$ e appartenente al fascio di rette per Q.

$$\Rightarrow \qquad \Lambda_2 = \{ [\underbrace{(x_0 - x_1)^1}_{\text{STA NEL LUOGO BASE DEL FASCIO}} \cdot (t_0x_1 + t_1x_2)^1 \mid (t_0, t_1) \in \mathbb{P}^1 \}$$

$\boxed{\text{DEF}}$ Una **PARAMETRIZZAZIONE RAZIONALE** di una curva piana proiettiva $Z_P(F)$ è

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma \longrightarrow Z_P(F)$$

POLINOMIALE & GENERICAM. INIETTIVA

INSIEME FINITO DI PUNTI CHE PUÒ ESSERE VUOTO

INIETTIVA DAPPERTUTTO A MENO DI UN NUMERO FINITO DI PUNTI

e data da componenti del tipo:

$$\varphi(t_0 : t_1) = (F_0(t_0,t_1) : F_1(t_0,t_1) : F_2(t_0,t_1))$$

PER ESERCIZIO SI VERIFICHI CHE È BEN DEFINITA SU $\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$

OMOGENEI (COME SEMPRE) DELLO STESSO GRADO

$\boxed{\text{OSS}}$ [Come caratterizzare la restrizione di φ ad un aperto affine]

POSSIAMO PENSARE $t_0 = 1$

$$U_0 := \{(t_0 : t_1) \mid t_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1 \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{A}^1$$

$$V_0 := \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2 \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{A}^2$$

tramite immersioni j_0

$$\varphi(U_0 \setminus \Sigma_1) \cap V_0 = \{ (F_0(1,t) : F_1(1:t) : F_2(1:t)) \mid F_0(1,t) \neq 0 \} \subset Z_P(F) \cap V_0$$

troviamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
U_0 \setminus \Sigma \arrow[r, "\varphi"] & Z_P(F) \cap V_0 \\
A^1 \setminus j_0^{-1}(\Sigma) \arrow[u, "j_0"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Z(aF) \subset A^2 \arrow[u, "j_0"']
\end{tikzcd}$$

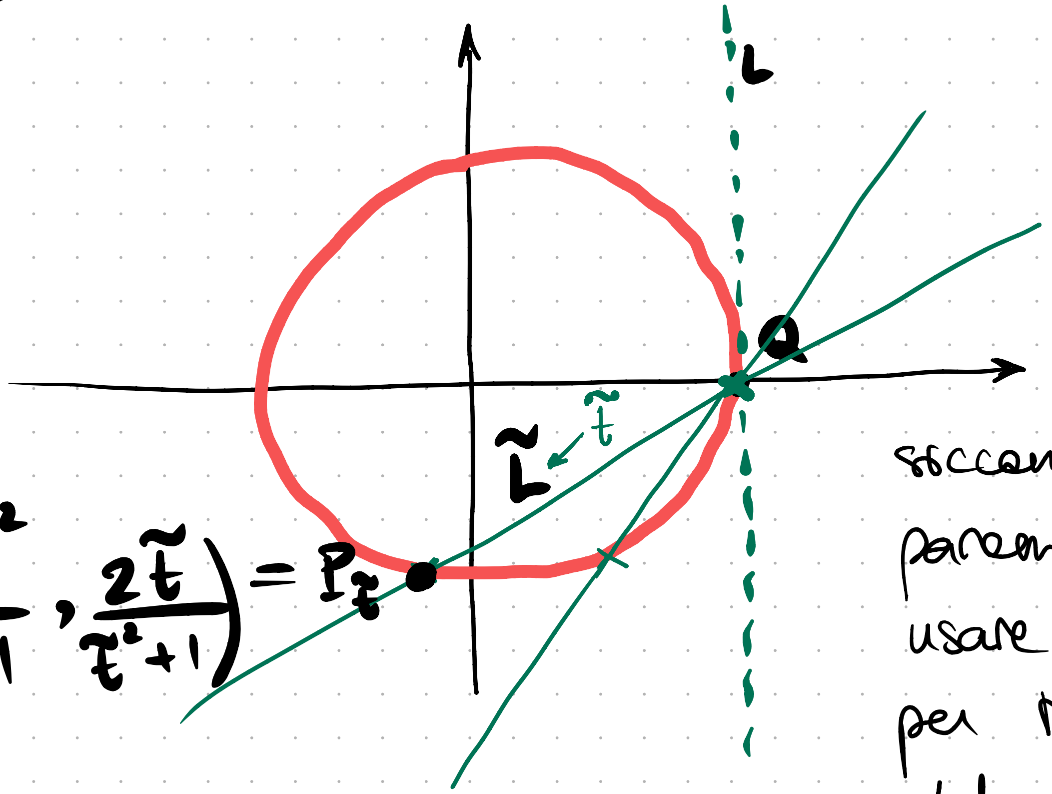
dove:

$$\psi(t) = \left(\frac{F_1(1,t)}{F_0(1,t)}, \frac{F_2(1,t)}{F_0(1,t)} \right) = \left(\frac{aF_1(t)}{aF_0(t)}, \frac{aF_2(t)}{aF_0(t)} \right) = \left(\frac{f_1(t)}{f_0(t)}, \frac{f_2(t)}{f_0(t)} \right)$$

Quindi la restrizione di una mappa **RAZIONALE** proiettiva è una applicazione razionale tra spazi affini, le cui componenti sono quozienti di polinomi (funzioni razionali nel senso solito).

Viceversa partendo da $\psi : A^1 \setminus \Sigma' \longrightarrow Z(f) \subset A^2$ razionale (FINITO, EVENTUALMENTE VUOTO)
si può sempre estendere ad una mappa razionale proiettiva (per esercizio)

Esempio: $\begin{cases} Z(x^2+y^2-1) \subseteq \mathbb{A}^2 \\ (x-1)+t\cdot y=0 \end{cases}$ ← FASCIO DI RETTE PASSANTI PER $Q=(1,0)$



$$\left(\frac{1-\tilde{t}^2}{\tilde{t}^2+1}, \frac{2\tilde{t}}{\tilde{t}^2+1}\right) = P_{\tilde{t}}$$

IDEA: c'è una biezione tra i punti del cerchio $\setminus Q$ e le rette del fascio $\setminus L$

siccome il fascio è parametrizzato da t, voglio usare questa biezione per trovare una param. del cerchio in t

Basta sostituire $x=1-ty$ nella prima equazione:

$$(1-ty)^2+y^2-1=0 \iff (t^2+1)y^2-2ty=0 \iff \underbrace{y^1}_{\text{INTERSEZIONE CON } Q=(1,0)}\cdot\left((t^2+1)y-2t\right)^1=0$$

mentre la radice $y = \frac{2t}{t^2+1}$ rappresenta la seconda coordinata dell'intersezione tra cerchio e retta. Otteniamo la param.

$$\psi : \mathbb{A}^1 \setminus \underbrace{\{i, -i\}}_{=\Sigma'} \longrightarrow Z(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{A}^2$$

$$t \longmapsto \psi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

Se $\overline{C} := Z_{\mathbb{P}}(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2)$ chiusura proiettiva allora

$$\overline{\psi} = \varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Z_{\mathbb{P}}(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2)$$

$\Sigma = \phi$

$$(t_0 : t_1) \longmapsto \varphi(t_0 : t_1) = \left(t_1^2 + t_0^2 : t_0^2 - t_1^2 : 2t_0t_1 \right)$$

Esempio: $f(x,y) := xy(y-x)(y-2x) + (y+3x)(y+x)(y+2x)$

Considero $Z(f) \subset \mathbb{A}^2$ e la param.:

$$\psi : \mathbb{A}^1 \setminus \overbrace{\{0,1,2\}}^{=\Sigma'} \longrightarrow Z(f) \qquad t \mapsto \psi(t) = \left(\frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{t(t-1)(t-2)}, \frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{(t-1)(t-2)} \right)$$

$$\overline{C} := Z_{\mathbb{P}}\left(x_1 x_2 (x_2 - x_1)(x_2 - 2x_1) + (x_2 + 3x_1)(x_2 + x_1)(x_2 + 2x_1)\, x_0 \right)$$

$$\overline{\psi} = \varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \overline{C}$$

$$(t_0 : t_1) \longmapsto \varphi((t_0 : t_1)) =$$

$$= \left(t_0 t_1 (t_1 - t_0)(t_1 - 2t_0) : t_0 (t_1 + t_0)(t_1 + 2t_0)(t_1 + 3t_0) : t_1 (t_1 + t_0)(t_1 + 2t_0)(t_1 + 3t_0) \right)$$

$\boxed{\text{THM}}$ **$Z_{\mathbb{P}}(F)$ RAZIONALE $\Rightarrow \exists\, \varphi$ PARAMETRIZ. RAZIONALE per $Z_{\mathbb{P}}(F)$**

Dim.: $\mathrm{Sing}(F) = \{P_1, \dots, P_s\}$ e fissiamo altri $2d-3$ punti Q_j nonsingolari in $Z_{\mathbb{P}}(F) \cap \mathcal{U}_0$. $\mathcal{U}_0 = \mathbb{P}^2 \setminus Z_{\mathbb{P}}(x_0)$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che (a meno di proiettività — far vedere per esercizio)

1. $\mathrm{Sing}(F) \subset \mathcal{U}_0$
2. $Z_{\mathbb{P}}(F)$ e i punti $\underset{m_1}{P_1}, \dots, \underset{m_s}{P_s}, Q_1, \dots, Q_{2d-3}$ sono in posizione ammissibile rispetto a E_i per $i = 1, 2$ (entrambi) $(1:0:0) = E_1$