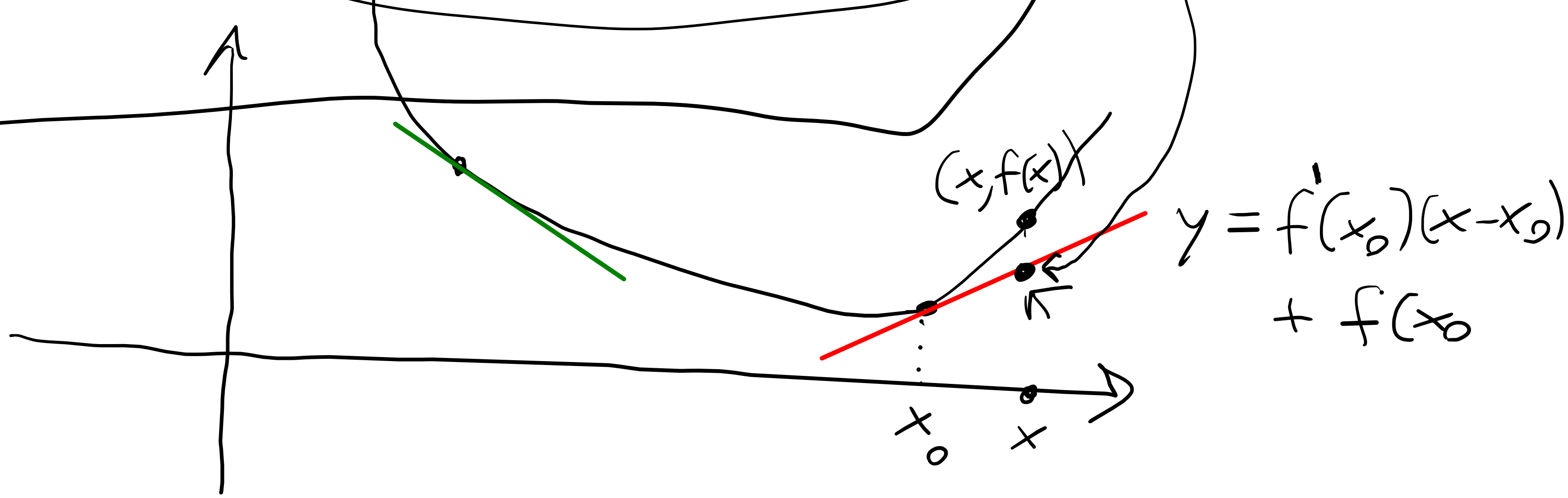
17 Novembre

Nel libro le funzioni convesse $f: I \to \mathbb{R}$ sono definite assumendo che esista $f'(x)$ $\forall x \in I$, I aperto, e dicendo che f è convessa se $\forall x_0 \in I$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

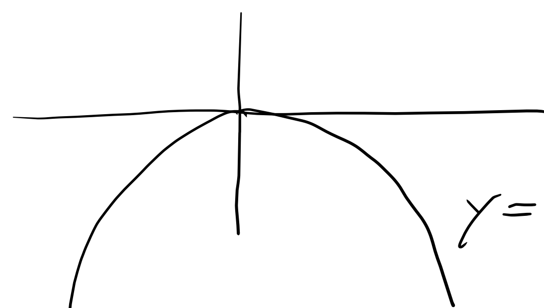
$$(7) \qquad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x \in I$$



Questa definizione (7) è equivalente alle definizioni che di funzione convessa che abbiamo dato le scorse settimane

Def Sia I un intervallo. Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ si dice concava (strett concava) in I se $-f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa (strett convessa).

Esempi $f(x) = -x^2$



Teor Sia $f: I \to \mathbb{R}$ t.c. $f''(x)$ esiste $\forall x \in I$. Sono equivalenti le seguenti due proposizioni

1) f è concava in I
2) $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

Dim $2) \Rightarrow 1)$ Sia $g(x) = -f(x)$.

Allora $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

$$\Downarrow$$

$$g''(x) = -f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$\underset{-f}{\overset{\shortparallel}{g}}$ è convessa in $I \Rightarrow f$ è concava in I

<u>Es</u> $\lg x$ è concava in $\mathbb{R}_+$.

$$(\lg x)'' = \left((\lg x)' \right)' = \left(x^{-1} \right)'$$

$$= -x^{-2} < 0 \quad \forall \quad x > 0$$

Quindi $\lg x$ è strettamente concava.

In precedenza abbiamo utilizzato il seguente fatto: se $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ allora

$$\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}_{\substack{\text{media} \\ \text{geometrica}}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\substack{\text{media} \\ \text{aritmetica}}}.$$

Noi abbiamo visto se $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se $\forall$ $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0,1]$ ho

$$f((1-t)x_1 + t x_2) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$$

Questa disuguaglianza si può esprimere anche riscrivendola

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in I \quad f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \quad \text{per } t_1, t_2 \in [0,1] \text{ con } t_1 + t_2 = 1}$$

Questa disuguaglianza si generalizza come segue:

Se $x_1, \dots, x_n \in I$ e $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ con $t_1 + \dots + t_n = 1$ allora se f è convessa si ha

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n).$$

Se f è concava vale quanto segue vale

Se $x_1, \dots, x_n \in I$ e $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ con $t_1 + \dots + t_n = 1$ allora se f è concava si ha

$$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \geq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n)$$

In precedenza abbiamo utilizzato il seguente fatto: Se $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ allora

$$\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}_{\text{media geometrica}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\text{media aritmetica}} . \qquad *$$

$$\Updownarrow$$

$$\lg (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \overset{?}{\leq} \lg \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$$\lg (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \lg (x_1 \cdots x_n) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{n} \lg(x_1) + \dots + \frac{1}{n} \lg(x_n) \overset{?}{\leq} \lg \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}} \quad **$$

Questo vale perché $t_1 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \frac{1}{n} = 1$$

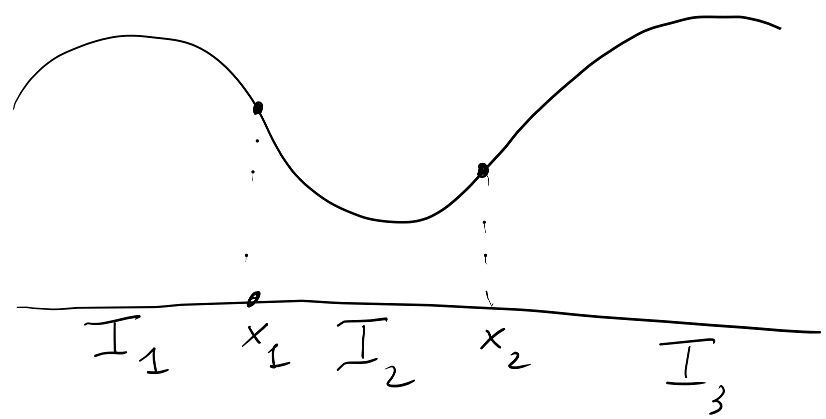
~~Sono~~ $**$ è vera perché siccome $\lg x$ è concava ~~ho~~

$$\lg(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \geq t_1 \lg(x_1) + \dots + t_n \lg(x_n)$$

$\forall\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ e ~~$\forall$~~ $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$

t.c. $t_1 + \dots + t_n = 1$

In generale una $f: I \to \mathbb{R}$ è concava in certi intervalli contenuti in I ed è convessa in certi altri intervalli contenuti in I



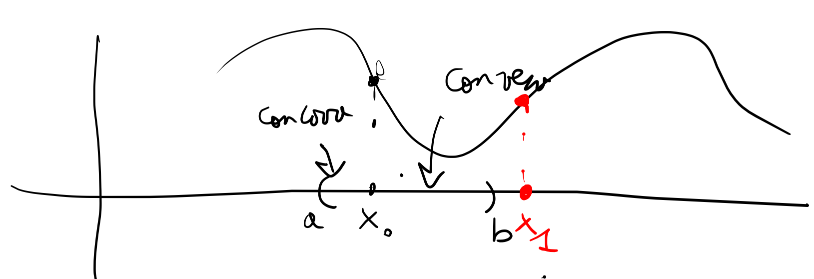
Nel disegno in I_1 è concava, in I_2 è convessa, in I_3 è concava. Nei punti x_1 ed x_2 la funzione cambia carattere. Questi punti vengono chiamati flessi

<u>Def</u> Sia $f: I \to R$ e sia $x_0 \in \mathring{I}$

Diciamo che x_0 è un flesso se esiste un intervallo $(a,b) \ni x_0$ $(a,b) \subset I$ t.c.

in (a, x_0) f è convessa (concava)

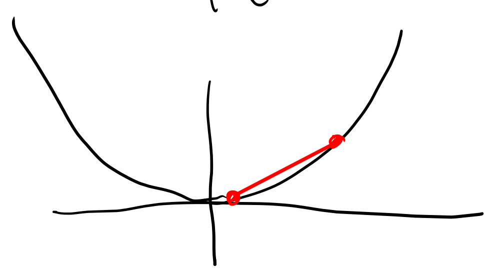
(x_0, b) f è concava (convessa)



Lemma Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, supponiamo che esista $f''(x)$ $\forall x \in \mathring{I}$. Allora se $x_0 \in \mathring{I}$ è un punto di flesso di f segue che $f''(x_0) = 0$.

Osservazione Il fatto che $f''(x_0) = 0$ non garantisce che x_0 sia un punto di flesso.

Esempio Sia $f(x) = x^4$ su $\mathbb{R}$

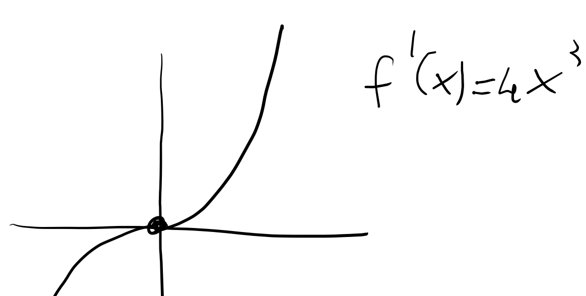


$f'(x) = 4x^3$ è funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ f è strettamente convessa in $\mathbb{R}$.

cioè $\forall$ $x_0 \neq x_1$ in $\mathbb{R}$ e $\forall$ $t \in (0,1)$

$$f((1-t)x_0 + tx_1) < (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$$

$f''(x) = 12x^2 \big|_{x=0} = 0$



Studi di funzione.

$$f(x) = e^{x}(x^2 - x + 1) \qquad f(0) = 1$$

1) Dominio $= \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x} x^{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x} x^{2} = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \implies x^2 - x + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

2) $$f'(x) = \left(e^{x}(x^2 - x + 1)\right)' = e^{x}\left[x^2 - x + 1 + 2x - 1\right]$$

$$= e^{x}\left[x^2 + x\right] = e^{x} x (x+1) = 0$$

$x = -1, 0$ sono i punti critici.

$f'(x)$ ha lo stesso segno di $x(x+1)$

	-1		0	
$+$		$-$		$+$

-1 è un punto di max locale

0 min

$$f'(x) = \left(e^x\,(x^2-x+1)\right)' = e^x\left[x^2-x+1+2x-1\right]$$

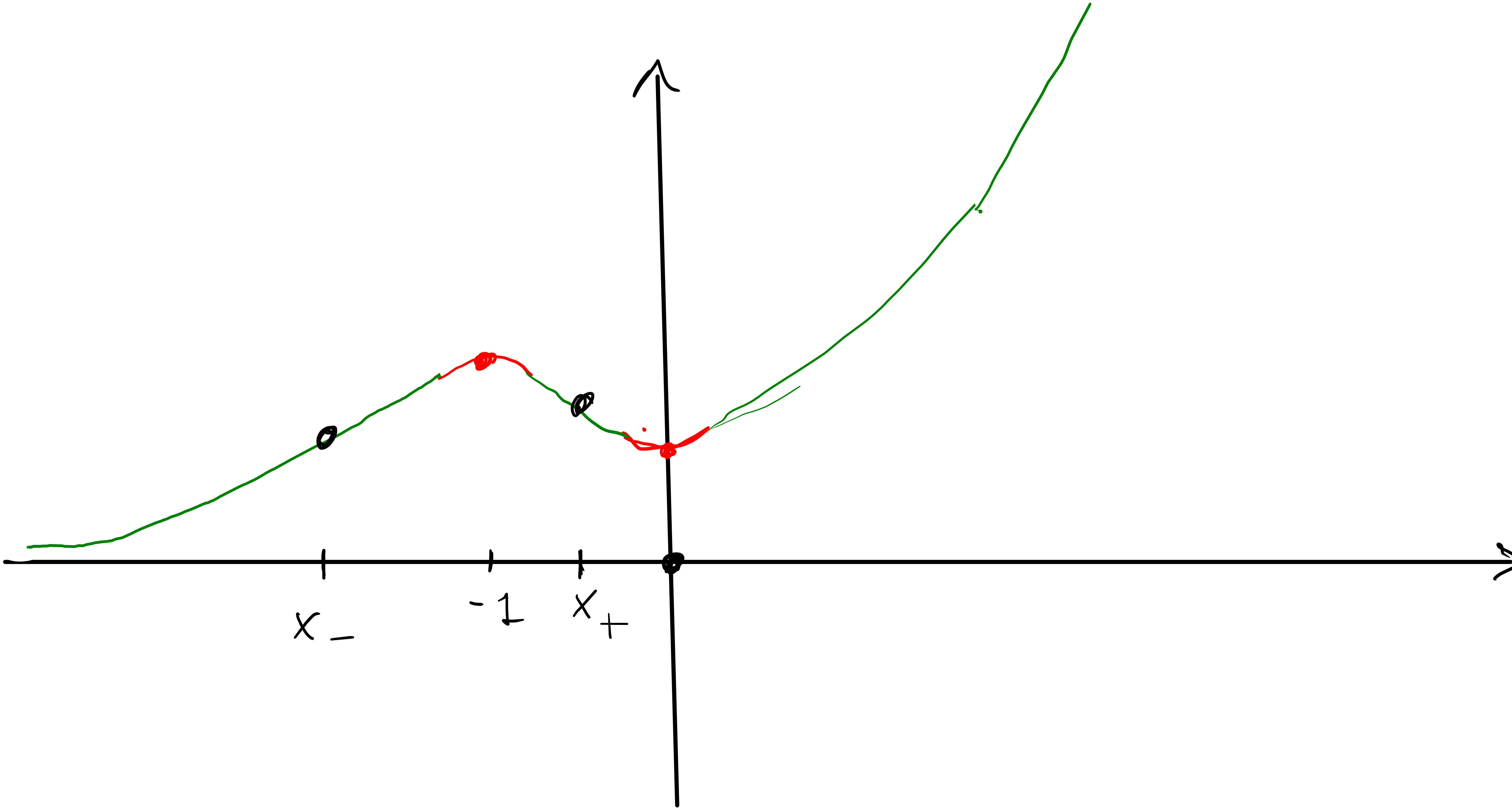
$$= e^x\left[x^2+x\right] = e^x\,x\,(x+1) = 0$$

$$f''(x) = \left(e^x\,(x^2+x)\right)' = e^x\left[x^2+x+2x+1\right]$$

$$= e^x\left(x^2+3x+1\right) = 0$$

$$x_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$x_- < x_+$$

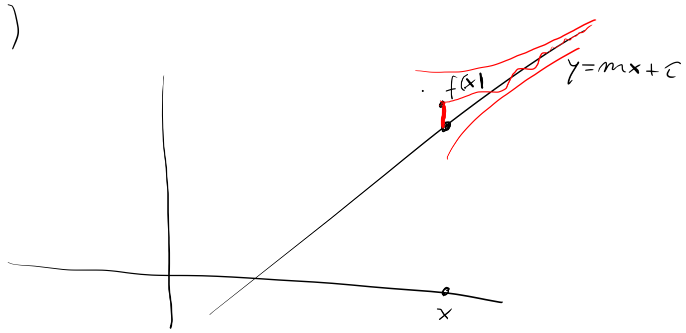

x_-
-1
x_+

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Allora una retta di equazione $y = mx + c$ si dice la retta asintotica di f a $+\infty$ $(-\infty)$

se

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \left(f(x) - (mx + c) \right) = 0$$



Supponiamo che esista la retta asintotica $y = mx + c$ ma che io non sappia i valori di m e di c.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - c \right) = 0 \implies$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx - c}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \cancel{\frac{c}{x}} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m \right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad (1)$$

Per trovare c ritorniamo a

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx - c \right] = 0$$

$$\Updownarrow$$

ora supponiamo di disporre di m

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = c \qquad (2)$$

$$f(x) = e^x (x^2 - x + 1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x x^2}{x} = +\infty$$

Non c'è retta asintotica a $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^x x = 0 = m$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = c$$

$y = 0$ è la retta asintotica

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2+1}{x-1}$$

Cerchiamo la retta obliqua a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2+1}{x-1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2+1}{x-1} - x \right)$$