

DERIVATE SUCCESSIVE

(98)

Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $\forall x \in]a, b[$
la funzione $f':]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ può a sua
volta essere derivabile. Se lo è, allora
 $(f')'(x) =: f''(x)$ si dice derivata seconda
di f .

ESEMPIO

Se $f(x) = \sin x$, allora $f'(x) = \cos x$,
 $f''(x) = -\sin x$

Se $f(x) = x^3$, allora $f'(x) = 3x^2$, e
 $f''(x) = 6x$.

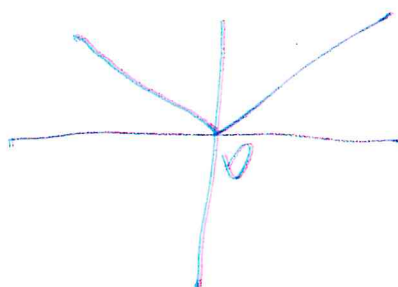
Allo stesso modo, si può definire f''' (la
derivata terza), $f^{(4)}$ (la derivata quarta),
e in generale $f^{(k)}$ (la derivata
 k -esima).

ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA MA NON DERIVABILE

$$f(x) = |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$$

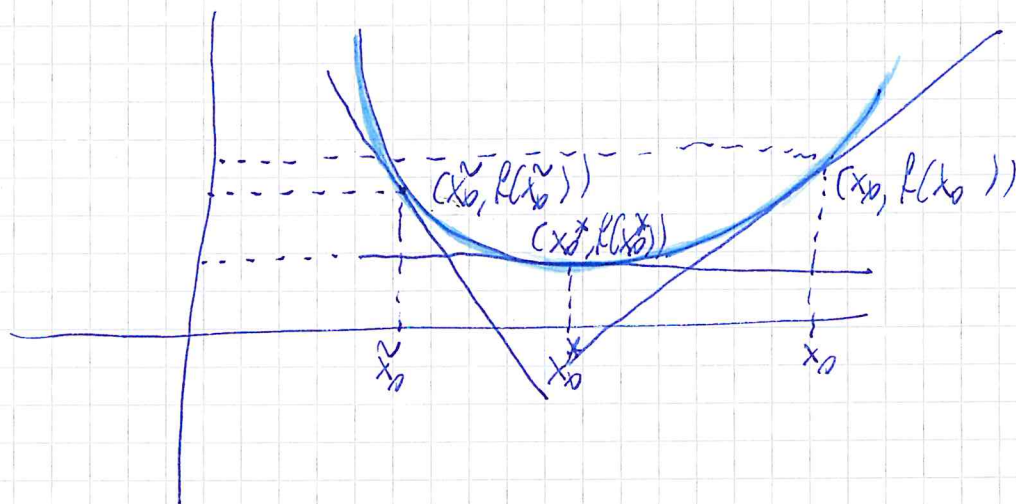
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$



CONCAVITA' - CONVESSITA'

(99)

Una funzione $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni punto $(x_0, f(x_0))$ sul grafico di f si ha che il grafico di f sta sopra la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$.



PROPOSIZIONE

$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ è convessa $\Leftrightarrow f'$ è crescente.

Dim. Sia f convessa.

Sia $x_1 < x_2$.

$$\text{Allora } f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq f'(x_2)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2). \text{ Quindi } f' \text{ è crescente}$$

Viceversa:

(100)

Sia f' crescente.

Sia $x > x_0$. Allora per Lagrange $\exists c \in]x_0, x[$ t.c.

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Sia $x < x_0$. Allora $\exists c \in]x, x_0[$ t.c.

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) \leq f'(x_0)(x_0 - x)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Quindi il grafico di f sta sopra la
retta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

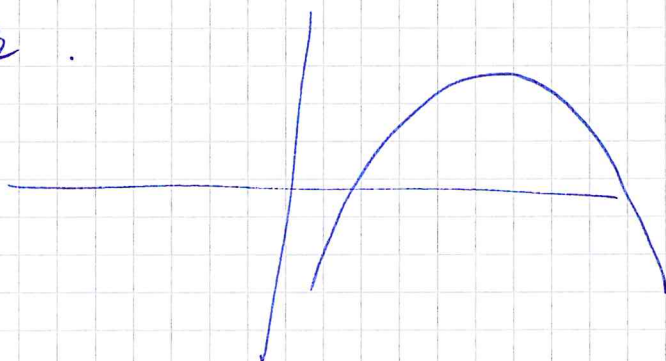
C.V.D.

COLLARIO

f è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ in $]a, b[$.

Una funzione si dice convessa se

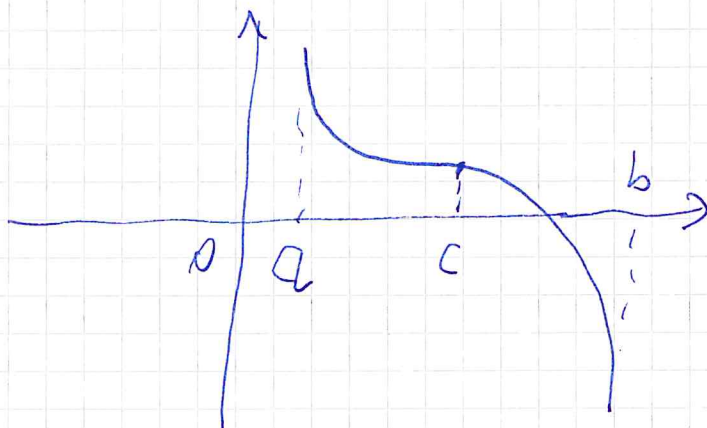
$-f$ è concava.



Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che

(101)

$f: [a, c]$ è convessa e $f: [c, b]$ è concava, allora c è il punto di flesso.



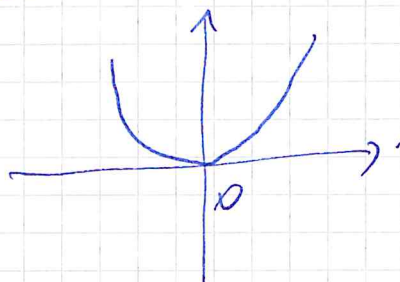
ESEMPLI

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

$\Rightarrow f$ è convessa



$$f(x) = x^3$$

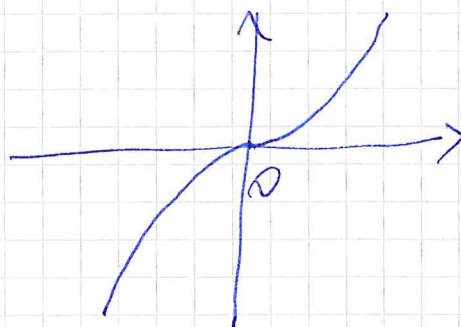
$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

Si ha $f' \geq 0 \forall x \Rightarrow f$ crescente.

$$f''(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x > 0 \\ \leq 0 & \text{se } x < 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ è punto di flesso.



Torniamo alla funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^3}$

studiate prima.

$$f'(x) = \frac{3-2x}{x^4}$$

calcoliamo $f''(x) = \frac{-2x^4 - (3-2x)4x^3}{x^8}$

$$= \frac{-2x^4 + 8x^4 - 12x^3}{x^8}$$

$$= \frac{6x^4 - 12x^3}{x^8}$$

$$= 6 \frac{x-2}{x^5}$$

Andiamo i segni

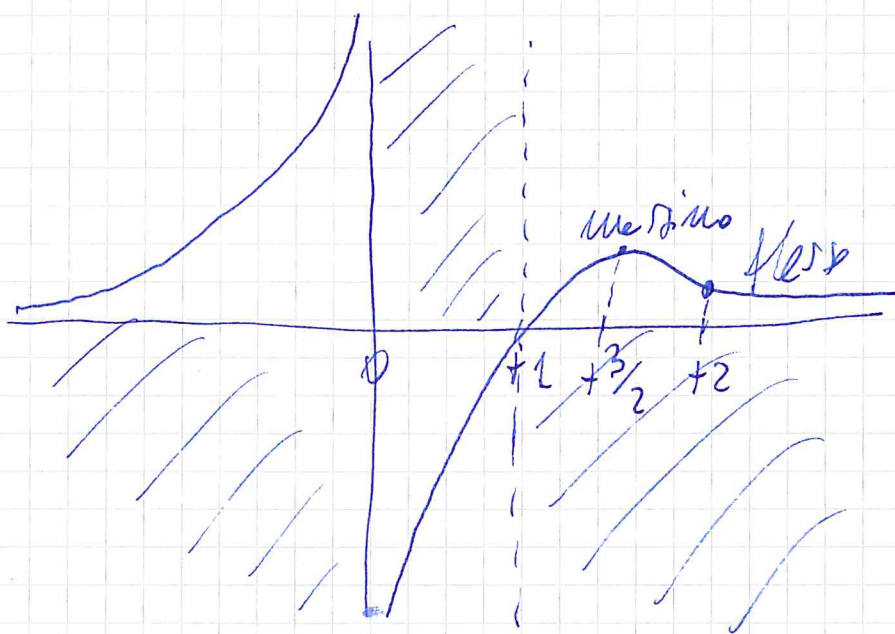
		0	+2	
$x-2$	-		-	+
x^5	-		+	+
$\frac{x-2}{x^5}$		+	-	+

funzione crescente in $]-\infty, 0[$,

concava in $]0, +2[$

crescente in $] +2, +\infty[$.

flessa in $+2$.



ASINTOTI OBLIQUI

Sia $f:]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty$

Se esiste la retta $y = mx + q$, $m \neq 0$,
si dice asintoto obliquo per f e $+\infty$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$$

Per trovare un eventuale asymptoto obliquo,
bisogna:

a) Controllare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty$

b) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Se tale limite esiste finito e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0, \text{ allora}$$

(104)

c) si calcola $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$.

Se tale limite esiste finito e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q, \text{ allora la retta}$$

$y = mx + q$ è asintoto obliquo.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\Rightarrow y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$

