Sessioni 6, 7, 8

TEO $F, G \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$
$|Z_{\mathbb{P}}(F) \cap Z_{\mathbb{P}}(G)| = d^2$ ← d^2 punti distinti

$\Rightarrow$ Se $\exists n < d$: nd di questi punti giacciono su una curva irriducibile di $\deg = n$ $\Rightarrow$ i rimanenti $d(d-n)$ giacciono su una curva di $\deg = d-n$

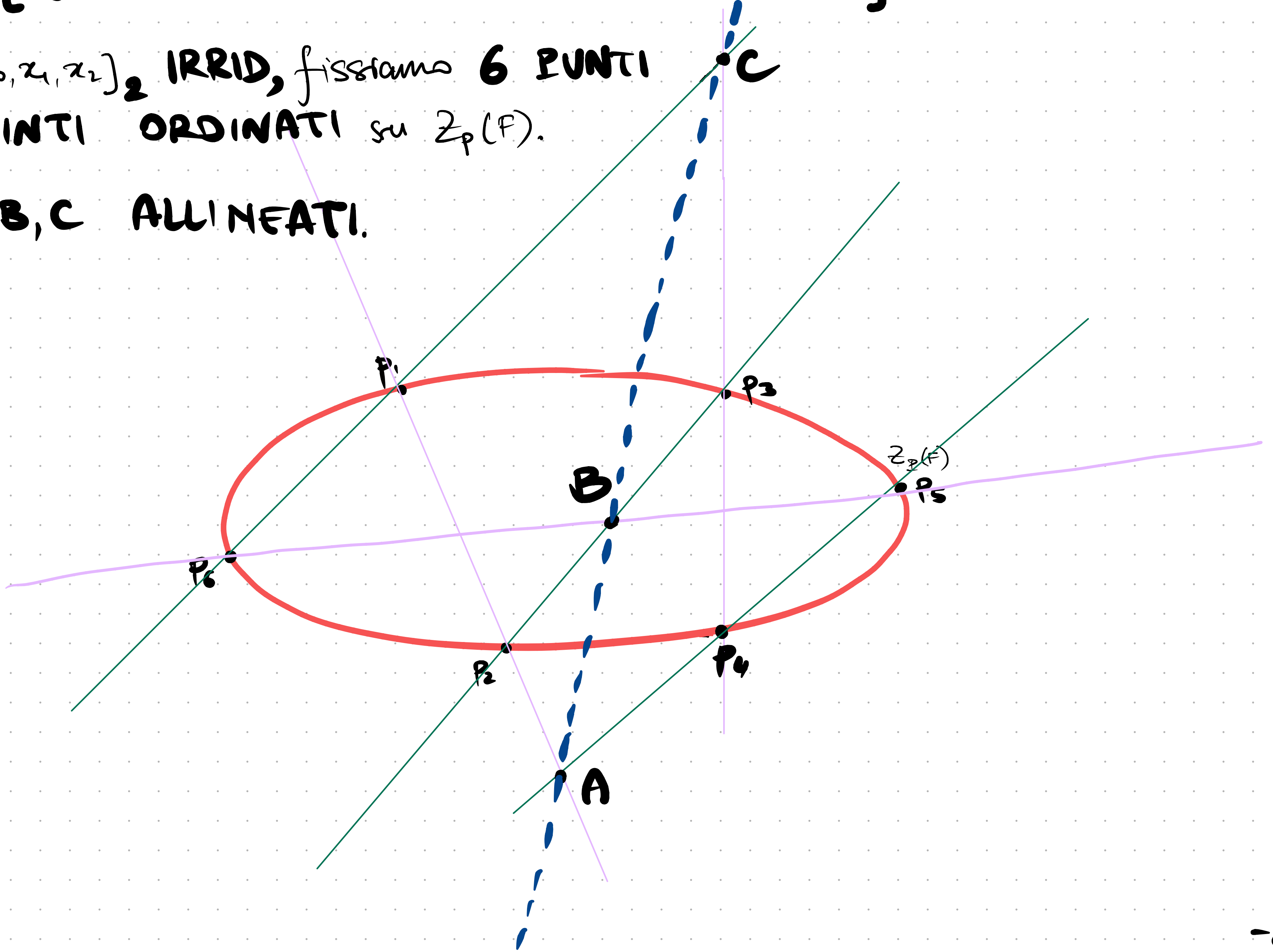
Dim.: Sia $\Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F,G))$ fascio, $H \in \mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_n$ IRRID. con $Z_{\mathbb{P}}(H) = \{nd \text{ punti}\}$. Prendo $Q \in Z_{\mathbb{P}}(H)$ un punto diverso
$\dim(\Lambda) = 1 \Rightarrow \exists M \in \Lambda : Z_{\mathbb{P}}(M) \ni Q$ [fascio "spanne" tutto il piano]
Allora per costruzione $Z_{\mathbb{P}}(H) \cap Z_{\mathbb{P}}(M)$ contiene $nd + 1 > \deg(M) \cdot \deg(H)$ PUNTI $\Rightarrow$ per il teorema di Bezout hanno una componente comune, ma H IRRID. $\Rightarrow Z_{\mathbb{P}}(H) \subseteq Z_{\mathbb{P}}(M)$ e $M = H \cdot H_1$ (per un certo $H_1 \in \mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_{n-d}$)
Ma $Bs(\Lambda)$ ha d^2 punti distinti
$\Rightarrow Z_{\mathbb{P}}(H_1) \cap Z_{\mathbb{P}}(F)$ ha $d(d-n)$ punti base del fascio.

$\square$

$\boxed{\text{TEO}}$ [ESAGRAMMA MISTICO di PASCAL]

$F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_2$ IRRID, fissiamo 6 PUNTI DISTINTI ORDINATI su $Z_p(F)$.

$\Longrightarrow$ A, B, C ALLINEATI.



Dim.: $H_1 : \overline{P_1P_2} \cup \overline{P_3P_4} \cup \overline{P_5P_6}$
$H_2 : \overline{P_2P_3} \cup \overline{P_4P_5} \cup \overline{P_6P_1}$ } unione di 3 rette; CUBICHE si intersecano

in $\underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6}_{\text{giacciono su una CONICA IRRIDUCIBILE}}, A, B, C$

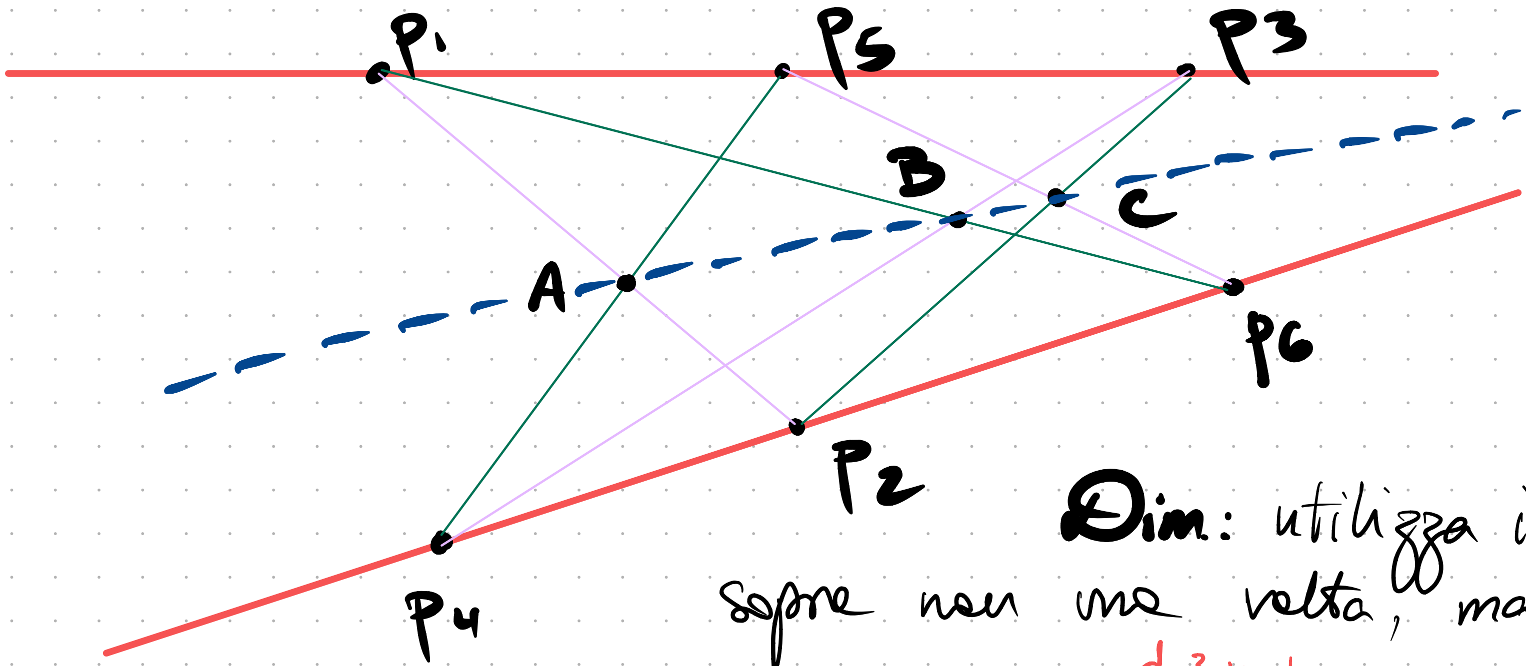
Allora per il teorema precedente (con $d=3$, $n=2$) abbiamo che i rimanenti $d(d-n) = 3(3-2) = 3$ punti devono giacere su una curva di grado $d-n=1$
$\Rightarrow$ su una retta $\square$

OSS Questi esagoni si possono costruire con 6 punti fissati?
6! permutazioni di 6 punti $\Rightarrow$ 6! possibili etichettature dei 6 punti

ma 12 danno lo stesso esagono per simmetrie

$\rightsquigarrow \frac{6!}{12} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6\cdot2} =$ **60 ESAGONI DIVERSI**
60 RETTE di PASCAL } Esagramma Mistico di Pascal

TEO (PAPPO, o PASCAL per conica degenere)



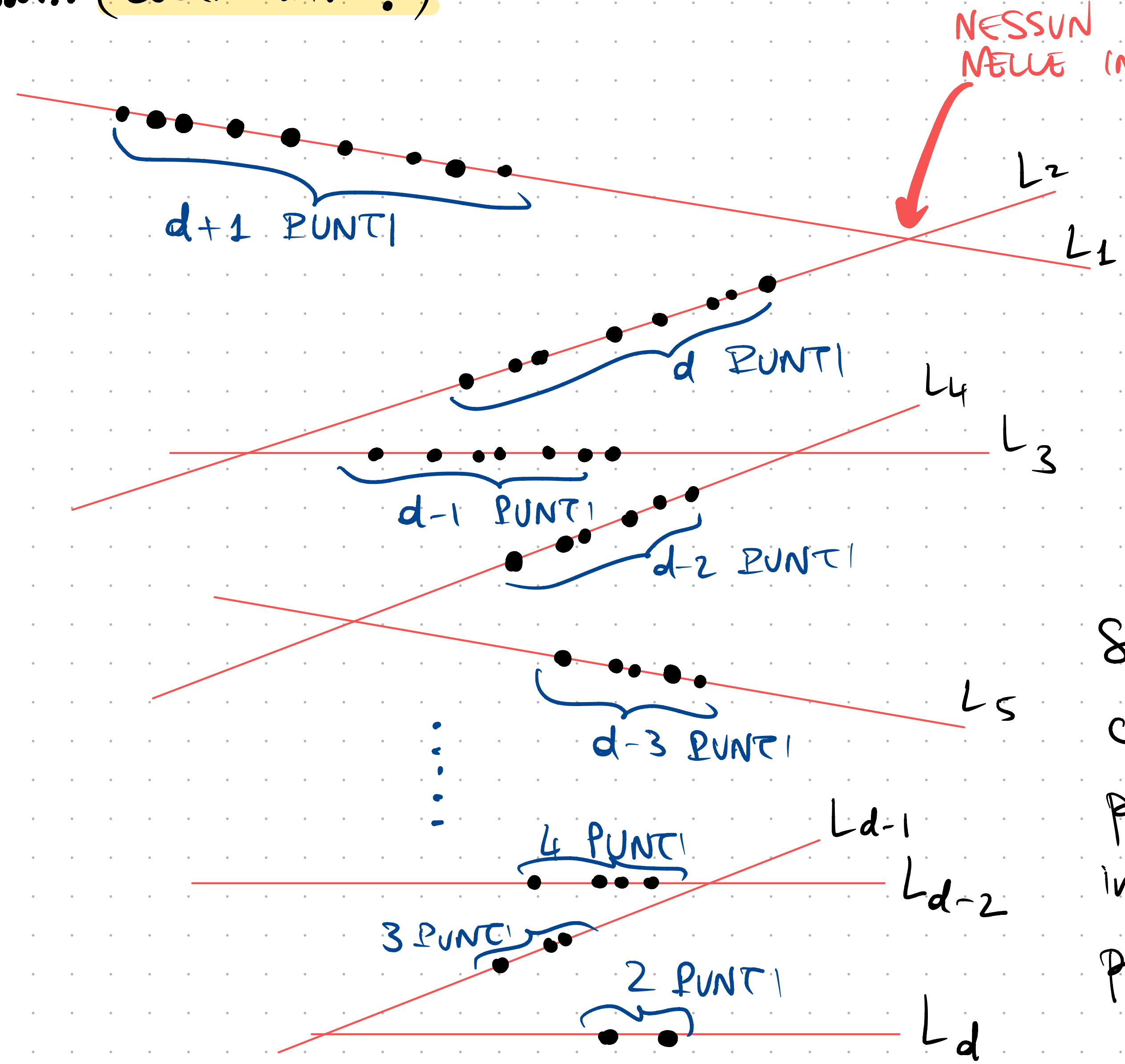
Dim: utilizza il teorema sopra non una volta, ma due:

① P_1, P_3, P_5 ALLINEATI $\Rightarrow$ $\{P_2, P_4, P_6, A, B, C\} \in$ CONICA ($d=3, n=1$)

② $\{P_2, P_4, P_6\}$ ALLINEATI $\Rightarrow \{A, B, C\} \in$ RETTA

PROP $\forall d \geq 1 \quad \exists\, N(d,2) = \frac{d(d+3)}{2}$ PUNTI IN POSIZIONE GENERALE rispetto alle curve di grado d

Dim.: (COSTRUTTIVA!)



TOTALE PUNTI:

$$\sum_{i=1}^{d} \underbrace{(d+2-i)}_{\text{sulla retta } L_i} = \underbrace{\binom{d+2}{2} - 1}_{N(d,2)}$$

$$C := \bigcup_{i=1}^{d} L_i$$ contiene tutti questi $N(d,2)$ punti.

$\deg(C) = d$

Sia F di grado $= d$ t.c. $Z_P(F)$ contenga tutti questi punti, allora $Z_P(F)$ interseca L_1 in $(d+1)$ punti, ma è di grado $= d$

Allora per Bezout $L_1 \subseteq Z_p(F)$. Allora considero $Z_p(F) \setminus L_1$ ha grado $d-1$, ma interseca L_2 in d punti, per Bezout deve contenere tutta la retta L_2, allora considero $Z_p(F) \setminus L_1 \setminus L_2$ di grado $d-2$, ... etc.

In conclusione, abbiamo $Z_p(F) = C$. $(\exists!)$

Quindi la condizione di contenere **QUESTA CONFIGURAZ.** di $N(d,2)$ punti dà un sistema lineare di **DIM ZERO.**

$$\dim(\Lambda) = 0 = \underbrace{\dim\left(\mathbb{P}(K[x_0,x_1,x_2]_d)\right)}_{=N(d,2)} - \operatorname{codim}(\Lambda)$$

Allora $\operatorname{codim}(\Lambda) = N(d,2)$

$\Rightarrow$ i $N(d,2)$ punti sono IN POSIZIONE GENERALE $\square$

$\boxed{\text{COR}}$ $\forall d \geq 1$ $\exists\, N(d,2)+1$ **PUNTI** in $\mathbb{P}^2$ che non giacciono su **NESSUNA** curva piana di $\deg = d$.

Dim: scelgo quelli di prima e un altro che non sta in C. $\square$

Esempio: $\exists$ 6 punti che non stanno su nessuna conica
$\exists$ 10 punti " " " " " cubica

$\boxed{\text{COR}}$ $\exists! F$, $\deg(F) = d$: $F(p_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N(d,2)$

?: Cosa possiamo dire se anziché imporre "punti di passaggio" imponiamo "punti singolari"?

Memo: condizione Q singolare $\longleftrightarrow$ codim $= n+1$
(nel piano codim $= 3$)

$\boxed{\text{TEO}}$ [ALEXANDER-HIRSCHOWITZ '95]

$d \geq 1$. $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}^2$ POSIZIONE GENERALE rispetto a $\deg = d$

$$\text{codim}\left(\Lambda^{\text{sing}}_{P_1,\dots,P_r}\right) = \min\{3r, N(d,2)+1\}$$

PER CONVENZIONE SPAZI DI DIM. NEGATIVA SONO VUOTI. QUINDI SE $\text{codim}(\Lambda) = N(d,2)+1$
$\Rightarrow \dim(\Lambda) = N(d,2) - N(d,2) - 1 = -1 < 0$
$\Rightarrow \Lambda = \emptyset$

NESSUN DIFETTO!
TUTTE LE CONDIZIONI SONO EFFETTIVAM. LIN. INDIP. "FINCHÉ C'È SPAZIO.

A MENO DI
$(r,d) = (2,2), (5,4)$.

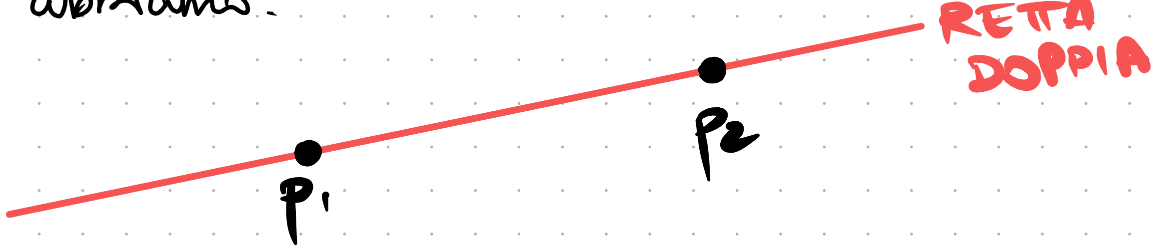
CASI PARTICOLARI:

$(r,d)=(2,2)$: Se avessimo codim $= \min\{\underbrace{3r}_{=6}, \underbrace{N(d,2)+1}_{=6}\} = 6 \Rightarrow \Lambda = \emptyset$

$\binom{d+2}{2} - \cancel{1} + \cancel{1} = \binom{4}{2} = 6$

quindi non dovrebbe esistere nessuna **CONICA SING. IN DUE PUNTI**,

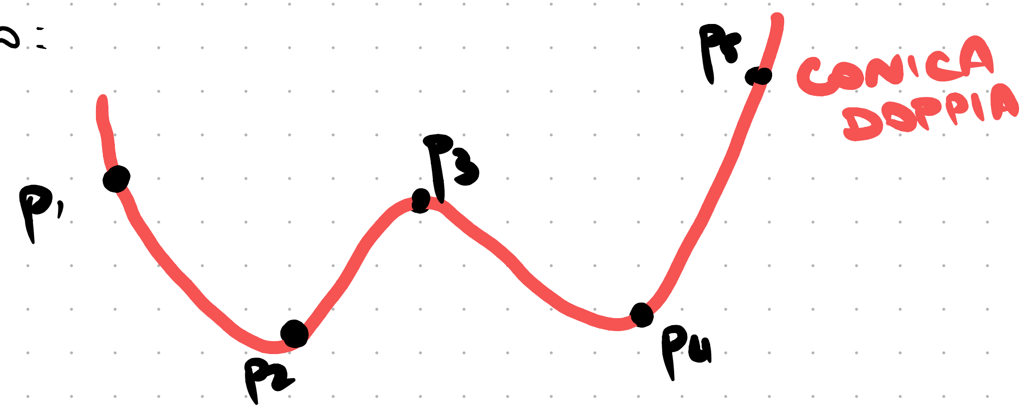
e invece abbiamo:



$(r,d)=(5,4)$: Se avessimo codim $= \min\{\underbrace{3r}_{=15}, \underbrace{N(d,2)+1}_{=15}\} = 15 \Rightarrow \Lambda = \emptyset$

quindi non dovrebbe esistere nessuna **QUARTICA SINGOLARE in 5 PUNTI**

e invece abbiamo:



Questi esempi vengono dal fatto che $d = 2 \cdot d'$

[potrei pensare anche a controesempi con $d = 3 \cdot d'$, $d = k \cdot d'$, con $k > 3$ ma sarebbero ancora più difficili da realizzare].

Una volta che $d = 2 \cdot d'$, sappiamo che per $N(d', 2) = \frac{d'(d'+3)}{2}$ punti passa una e una sola curva di grado d', quindi vogliamo scegliere $r = N(d', 2)$, quindi cerchiamo coppie $(r, d) = (N(d', 2), 2 \cdot d')$

$$\left.\begin{array}{l} d' = 1 \Rightarrow (N(d', 2), 2 \cdot d') = (2, 2) \\ d' = 2 \Rightarrow (N(d', 2), 2 \cdot d') = (5, 4) \end{array}\right\} \text{troviamo esattamente i due controesempi}$$

D: Ma perché per $d' = 3, 4, 5, \ldots$ non sono controesempi?

R.:

d'	$3 \cdot N(d', 2)$	$N(2d', 2) + 1$
1	6	6
2	15	15
3	27	28
4	42	45
5	60	66
⋮	⋮	⋮

UNICI VALORI

§. SISTEMI LINEARI POLARI & CURVE POLARI

DEF $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$, $d \geq 2 \Rightarrow$ il **SISTEMA LINEARE POLARE** è definito

$$\Lambda_F^{polare} := \mathbb{P}\left(\mathrm{Span}(\partial_0 F, \partial_1 F, \partial_2 F)\right)$$

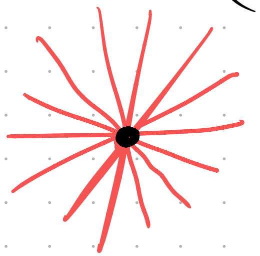
e la **CURVA POLARE** di F rispetto al punto $R = (r_0 : r_1 : r_2) \in \mathbb{P}^2$ è def.

$$\mathrm{Pol}_R(F) := \nabla F \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad \text{polinomio di } \deg = d-1 \geq 1$$

D: Le derivate parziali sono sempre LIN INDIP?

Noi avevamo visto $\sum_{j=1}^{n=2} x_j \partial_j F = d \cdot F$ e quindi sappiamo che

$(\partial_j F)(R) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \implies F(R) = 0.$ (Eulero non basta)

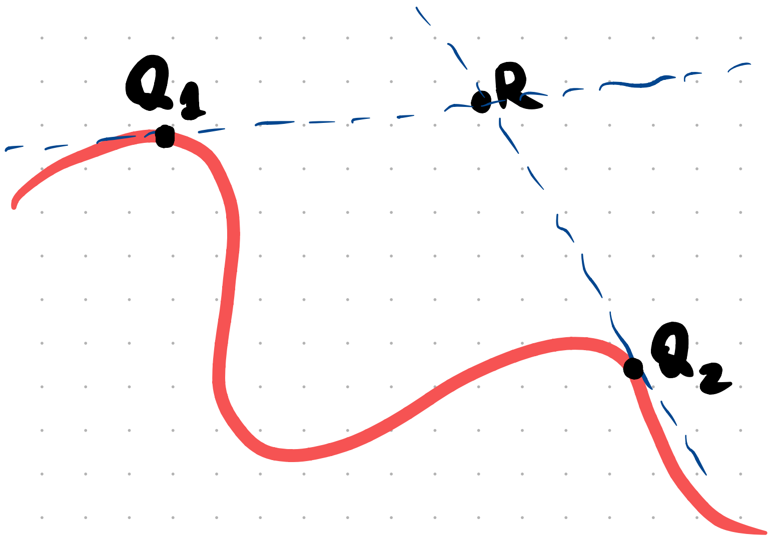
PROP $\partial_j F$ sono LIN. DIP. $\iff Z_P(F) =$  d RETTE tutte per uno stesso punto

[praticamente la cosa ridotta più degenere che esiste]

$\boxed{\text{PROP}}$ $F(R) \neq 0$. Allora:

un punto per cui non passa $Z_P(F)$

$$Z_P(F) \cap Z_P(\mathrm{Pol}_R(F)) = \mathrm{Sing}\, Z_P(F) \cup \underbrace{\left\{ Q \in Z_P(F) : \overline{QR} = \tau_Q Z_P(F) \right\}}_{\text{punti di tangenza delle tangenti alla curva uscenti dal punto } R.}$$



<u>Proof</u>: $Q \in \underbrace{LHS}_{\substack{\text{LEFT-HAND SIDE} \\ \text{"A SX DELL' UGUALE"}}} \Rightarrow F(Q) = 0 \wedge \nabla F(Q) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}}_{=R} = 0$

Allora ci sono due casi:

1. $\nabla F(Q) = 0$ e $F(Q) = 0 \Rightarrow Q$ è singolare
2. $\nabla F(Q) \neq 0$ e $F(Q) = 0 \Rightarrow R \in \tau_Q Z_P(F)$
   (ma $\nabla F(Q) \cdot R = 0$)

$\square$

$\boxed{\textbf{COR}}$ $Z_P(F)$ IRRID. $\deg = d$ ma non è proprio $\ast$ [i.e. per prop. $\partial_j F$ LIN INDIP.]

per un $R : F(R) \neq 0$ **# tangenti $\tau_Q(Z_P(F))$ per il punto R** $\leq d(d-1)$

<u>Proof</u>: $Z_P(F) \neq \ast \Rightarrow \partial_j F$ LIN INDIP $\Rightarrow (\partial_0 F, \partial_1 F, \partial_2 F)(R)$ LIN INDIP. $\Rightarrow \deg(\mathrm{Pol}_R(F)) = d-1$ e $Z_P(F)$ IRRID

$\Rightarrow Z_P(F)$ non può avere componenti comuni con $Z_P(\mathrm{Pol}_R(F))$

$\underset{\textbf{Bezout}}{\Longrightarrow}$ # punti intersezione $=$ prodotto dei gradi $= d \cdot (d-1)$ $\square$

$\boxed{\textbf{THM}}$ **(Bertini)**

$\left.\begin{array}{l} Z_P(F) \text{ INTEGRALE} \\ (\text{I.E. IRRID + RIDOTTO}) \\ R : F(R) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ La generica retta per R interseca $Z_P(F)$ in **d** punti distinti

Proof: $L \ni R$, per Bezout

$$\sum_{Q \in L \cap Z_P(F)} I_Q(L, Z_P(F)) = d \cdot 1 = d$$

Oss. che $I_Q(L, Z_P(F)) \geq 2 \iff Q \in \underbrace{\mathrm{Sing}\, Z_P(F)}_{\text{INSIEME FINITO PER CURVA RIDOTTA}} \vee \underbrace{L = \tau_Q(Z_P(F))}_{\text{FINITO PER IL COROLLARIO PREC [BOUND di } d(d-1)]}$

$\Rightarrow$ il numero di punti Q con $I_Q(\dots) \geq 2$ è finito

$\Rightarrow$ la generica retta non passa per nessuno di questi

$\Rightarrow$ possiamo assumere che $I_Q(L, Z_P(F)) = 1 \quad \forall Q \in L \cap Z_P(F)$ (genericam)

$\Rightarrow$ Bezout dà il risultato. $\square$