Lezione 28 - 17/11/2025

Funzioni continue

$f: E \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in E$

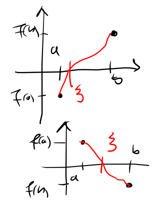
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E$
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Proprietà fondamentali delle funzioni continue.

T. (teorema degli zeri)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua

Sia $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\left(\Longleftrightarrow \begin{array}{c} f(a) < 0 \ \wedge \ f(b) > 0 \\ \text{oppure} \\ f(a) > 0 \ \wedge \ f(b) < 0 \end{array} \right)$



Allora $\exists \xi \in]a,b[: f(\xi) = 0$.

Corollario (teorema dei valori intermedi)

$f : \underset{\text{intervallo di } \mathbb{R}}{I} \to \mathbb{R}$, f continua

Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$

sia $f(x_1) < f(x_2)$ (oppure $f(x_2) < f(x_1)$)

sia $\gamma \in [f(x_1), f(x_2)]$

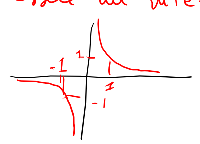
Allora $\exists x \in I : f(x) = \gamma$

(una funzione continua su un intervallo se assume 2 valori, assume tutti i valori intermedi)

attenzione: deve essere continua; il dominio deve essere un intervallo

Es. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$

non è un intervallo



è continua, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$

0 è un valore intermedio ma $\nexists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.c. $\frac{1}{x} = 0$

osservazione: gli intervalli si possono caratterizzare così:

E è un intervallo se e solo se vale questa proprietà

se $x_1, x_2 \in E$ allora $[x_1, x_2] \subseteq E$

Si ha quindi che

f continua manda intervalli in intervalli.

2) TEOREMA DI WEIERSTRASS

Teo (Weierstrass)

Sia K un compatto di $\mathbb{R}$

sia $f : K \to \mathbb{R}$ continua

Allora f ha massimo e minimo assoluti.

K compatto (in $\mathbb{R}$) significa da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosucc. convergente a un pto di K

K compatto (in $\mathbb{R}$) se e solo se K è chiuso e limitato.

2) TEOREMA DI WEIERSTRASS (in $\mathbb{R}$)

Teo (Weierstrass)

Sia K un compatto di $\mathbb{R}$

sia $f: K \to \mathbb{R}$ continua

Allora f ha massimo e minimo assoluti.

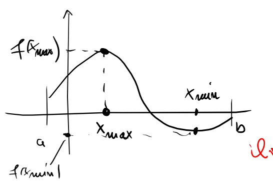
K compatto significa da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosucc. convergente a un pto di K

K compatto (in $\mathbb{R}$) $\iff$ K è chiuso e limitato.

def. sia $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$.

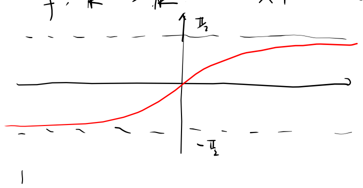
$\bar{x} \in E$ si dice punto di massimo assoluto per f (punto di minimo assoluto per f)

se $\forall x \in E$, $f(x) \leq f(\bar{x})$ ($f(x) \geq f(\bar{x})$)



Se $\bar{x}$ è punto di max assoluto il valore $f(\bar{x})$ si dice valore massimo assoluto (e analogo per il minimo)

Es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto \operatorname{arctg} x$



ha massimo? no

ha minimo? no

è limitata? sì

$\frac{\pi}{2} = \sup f(\mathbb{R})$

$\frac{\pi}{2}$ non è il max

Es. $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$

$0 = \inf(f(]0,+\infty[))$

0 non è il min

$f: E \to \mathbb{R}$

def. dico che f ha massimo assoluto quando in E c'è un punto di massimo assoluto

(cioè $\exists \bar{x} \in E: \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in E$)

Teo. $f: K \to \mathbb{R}$ $\quad$ $K \neq \emptyset$ compatto (di $\mathbb{R}$), $\neq \emptyset$

f continua

Allora f ha max e min. assoluti.

dim. Considero $f(K)$ (è un insieme $\neq \emptyset$, contenuto in $\mathbb{R}$)

ho 2 possibilità: $f(K)$ è illimitato superiormente

oppure

$f(K)$ è limitato superiormente

nel primo caso $\sup f(K) = +\infty$

nel secondo caso $\sup f(K) = L \in \mathbb{R}$

in entrambi i casi esiste una successione

$(y_n)_n$ in $f(K)$ t.c. $\lim_n y_n = \sup f(K)$

si estraendo i con esiste una successione

$(y_n)_n$ in $f(K)$ t.c. $\lim_n y_n = \sup f(K)$

infatti se $\sup f(K)$ è $+\infty$

esiste una $(y_n)_n$ t.c. $\lim_n y_n = +\infty$

perché $\forall n \; \exists \; y_n > n$ perché $f(K)$ è sup. illimitato

se $\sup f(K) = L \in \mathbb{R}$

uso la 2ª prop. del sup. $\forall n \; \exists y_n : \; y_n > L - \frac{1}{n}$

quindi $\lim_n y_n = L$

Però chi sono i punti di $f(K)$? sono le immagini.

quindi $y_n \in f(K) \Rightarrow \exists x_n \in K$, t.c. $f(x_n) = y_n$

quindi ho $(x_n)_n$ in K con $\lim_n f(x_n) = \sup f(K)$

però K è compatto. $\exists (x_{n_k})_k$ sotto successione

$\exists \bar{x} \in K$

t.c. $\lim_k x_{n_k} = \bar{x}$

però f continua $\exists \lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$

però
$$\lim_n f(x_n) = \sup f(K)$$
$$\parallel$$
$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

(perché se una successione ha limite tutte le sottosuccessioni hanno lo stesso limite)

conclusione $\sup f(K) = f(\bar{x}) \; (\neq +\infty)$

$\Longrightarrow \sup f(K) = \max f(K)$ (e non può essere $+\infty$)

$\bar{x}$ è punto di max CVD

si può dimostrare un teorema ancora più generale

Teorema (di COMPATTEZZA)

sia K compatto (di $\mathbb{R}$), sia $f: K \to \mathbb{R}$ continua

Allora $f(K)$ è compatto.

(una funzione continua manda compatti in compatti)

Esercizi. sia $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continua.

sia $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

¿È vero che che $[1,2] \subseteq f([0,1])$?

sì perché vale il teorema dei valori intermedi

Esercizi. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua.
sia $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

1) ¿È vero che che $[1,2] \subseteq f([0,1])$?

Sì perché vale il teorema dei valori intermedi

f è continua e il dominio è un intervallo.
$f([0,1])$ contiene 1 e 2
e allora contiene tutto il segmento $[1,2]$

2) ¿È vero che $f([0,1]) = [a,b]$ per qualche valore di $a, b \in \mathbb{R}$?

Sì perché vale il teorema dei valori intermedi e il teor. di compattezza

Valori intermedi $\Rightarrow$ $f([0,1])$ è un intervallo
compattezza $\Rightarrow$ $f([0,1])$ è un compatto
è chiuso e limitato

$\Rightarrow$ $f([0,1])$ è un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

(ovvero per Weierstrass

$$f([0,1]) = [\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{\min f}, \underset{\overset{\shortparallel}{b}}{\max f}]$$

ES. Sia $f : [1,3] \to \mathbb{R}$

i) supponiamo che $f([1,3]) = [1,4] \cup [5,6]$
provare che f non è continua

ii) supponiamo che $f([1,3]) = [0,+\infty[$
provare che f non è continua.

ES. sia $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

provare che f ha minimo assoluto.