$$\overline{C} := Z_P\left(x_1 x_2 (x_2 - x_1)(x_2 - 2x_1) + (x_2 + 3x_1)(x_2 + x_1)(x_2 + 2x_1)\, x_0 \right)$$

$$\overline{\psi} = \varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \overline{C}$$

$$(t_0 : t_1) \longmapsto \varphi((t_0 : t_1)) =$$

$$= \left(t_0 t_1 (t_1 - t_0)(t_1 - 2t_0) : t_0 (t_1 + t_0)(t_1 + 2t_0)(t_1 + 3t_0) : t_1 (t_1 + t_0)(t_1 + 2t_0)(t_1 + 3t_0) \right)$$

$\boxed{\textbf{THM}}$ **$Z_P(F)$ RAZIONALE $\Rightarrow \exists\, \varphi$ PARAMETRIZ. RAZIONALE per $Z_P(F)$**

Dim.: $\mathrm{Sing}(F) = \{P_1, \dots, P_s\}$ e fissiamo altri $2d-3$ punti Q_j nonsingolari in $Z_P(F) \cap \mathcal{U}_0$. $\mathcal{U}_0 = \mathbb{P}^2 \setminus Z_P(x_0)$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che (a meno di proiettività far vedere per esercizio)

1. $\mathrm{Sing}(F) \subset \mathcal{U}_0$
2. $Z_P(F)$ e i punti $\underset{m_1}{P_1}, \dots, \underset{m_s}{P_s}, Q_1, \dots, Q_{2d-3}$ sono in posizione ammissibile rispetto a E_i per $i = 1, 2$ (entrambi) $(1:0:0) = E_1$

Metodo delle aggiunte:

$$\Lambda_{d-1} := \{ C \mid \deg(C) = d-1,\ m_C(P_i) \geq m_i - 1,\ F(Q_j) = 0\ \ j=1,\dots,2d-3 \}$$

e come al solito stimiamo $\operatorname{codim}(\Lambda_{d-1})$. Abbiamo visto:

Condizione $m_C(\text{punto}) \geq m-1 \iff \partial_\bullet F(\text{punto}) = 0$ per tutte deriv. $(m-2)$-esime che sono tante quanto i monomi di grado $m-2 \Rightarrow$ [STARS & BARS] $\Rightarrow \binom{m-2+2}{2} = \binom{m}{2}$

C RAZIONALE PER IPOTESI

$$\Rightarrow \operatorname{codim}(\Lambda_{d-1}) \leq \sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} + (2d-3) = \binom{d-1}{2} + 2d-3$$

$$\Rightarrow \dim(\Lambda_{d-1}) = N(d-1,2) - \operatorname{codim}(\Lambda_{d-1}) \geq \frac{(d-1)}{2}(d+2) - \frac{(d-1)}{2}(d-2) - 2d + 3$$

$$= \frac{(d-1)}{2}[\cancel{d} - \cancel{d} + 2 + 2] - 2d + 3$$

$$= 2d - 2 - 2d + 3 = 1$$

Vogliamo dimostrare che $\dim(\Lambda_{d-1}) = 1$. Quindi se per assurdo $\dim(\Lambda_{d-1}) \geq 2$ allora possiamo aggiungere due punti di passaggio $S_1, S_2 \in Z_P(F)$ non singolari

$$\Lambda' := \Lambda_{d-1} \cap \Lambda^{S_1,S_2} \quad \Rightarrow \dim(\Lambda') \geq 0 \Rightarrow \Lambda' \neq \emptyset \Rightarrow [\exists D] \in \Lambda'$$

$Z_{\mathbb{P}}(F)$ INTEGRALE $\Rightarrow F$ IRRID $\Rightarrow F$ e D non hanno fattori comuni $\Rightarrow$

$$d(d-1) \overset{\text{BÉZOUT}}{=\!=} \sum_{Q \in Z_{\mathbb{P}}(F) \cap Z_{\mathbb{P}}(D)} I_Q(F,D) \geq \sum_{i=1}^{s} \underbrace{I_{P_i}(F,D)}_{\geq\, m_i(m_i-1)} + \sum_{j=1}^{2d-3} \underbrace{I_{Q_j}(F,D)}_{=\,1} + \sum_{k=1}^{2} \underbrace{I_{S_k}(F,D)}_{=\,1}$$

PER DEF di F e di Λ_{d-1}

PERCHÉ APPARTENGONO AD ENTRAMBE LE CURVE MA NON SONO SINGOLARI

$$\Rightarrow d(d-1) \geq \sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) + (2d-3) + 2$$

$$= 2\sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} + 2d - 1 \overset{\text{RAZIONALITÀ}}{=} 2\binom{d-1}{2} + 2d - 1 = d(d-1) - \cancel{2d} + 2 + \cancel{2d} - 1$$

$$\Rightarrow d(d-1) \geq d(d-1) + 1 \quad \text{CONTRADDIZIONE}$$

$$\Rightarrow \dim(\Lambda_{d-1}) = 1 \Rightarrow \Lambda_{d-1} \text{ fascio} \Rightarrow \Lambda_{d-1} = \mathbb{P}(\operatorname{Span}(G_0, G_1))$$

Claim: Λ_{d-1} PARAMETRIZZA I PUNTI di $Z_{\mathbb{P}}(F) \setminus \{P_i, Q_j\}$

Partendo da $Q \in Z_{\mathbb{P}}(F) \setminus \{P_i, Q_j\}$ siccome Λ_{d-1} sicuramente esiste $G : Z_{\mathbb{P}}(G) \in \Lambda_{d-1}$ tale che $G(Q) = 0$. D'altra parte se $Z_{\mathbb{P}}(G)$ intersecasse $Z_{\mathbb{P}}(F) \setminus \{P_i, Q_j\}$ in più di un punto distinto avremmo una contraddizione con Bezout come prima.

D'altra parte partendo da un $Z_P(G) \in \Lambda_{d-1}$ avrò

$$Z_P(G) \cap Z_P(F) = \{P_i, Q_j\} \sqcup T$$

Allora per Bezout:

$$d(d-1) = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} I_{P_i}(F,G)}_{\substack{=\sum_i m_i(m_i-1) \\ \text{RAZ.} \downarrow \\ =(d-1)(d-2) \\ \downarrow \\ = d(d-1)-(2d-2)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{2d-3} I_{Q_j}(F,Q)}_{=2d-3} + \underbrace{\sum_{k=1}^{|T|} I_{T_k}(F,Q)}_{\substack{=|T| \\ \text{PERCHÉ } T_k \\ \text{NON SINGOLARI}}} \Rightarrow |T| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$T = \{Q_G\}$$

UN UNICO PUNTO CHE DIPENDE DA G!

Quindi il claim è dimostrato. Allora possiamo parametrizzare $Z_P(F)$ meno un numero finito di punti utilizzando il sistema lineare delle aggiunte Λ_{d-1}! E vediamo come questa parametrizzazione è razionale.

Restringiamoci ad un aperto affine

$$Z_P(F) \cap Z_P(\overbrace{t_0 G_0 + t_1 G_1}^{=G}) \cap U_0 \overset{1:1}{\longleftrightarrow} Z(aF) \cap Z(t_0 aG_0 + t_1 aG_1) \subset \mathbb{A}^2$$

così facendo escludiamo i punti impropri (finiti perché F IRRID.), ed escludiamo 1 ulteriore punto $Z(aF) \cap Z(aG_1)$ supponendo che $t_0 \neq 0$, possiamo quindi riscalare $t_0 = 1$, ottenendo lo spezzo

$$Z(aF) \cap Z(aG_0 + t \cdot aG_1) \qquad t = t(G) \in \mathbb{K}$$

e finora abbiamo solo scartato un numero finito di punti da $Z_{\mathbb{P}}(F) \cap Z_{\mathbb{P}}(t_0 G_0 + t_1 G_1)$. Consideriamo le risultanti

$$R_1(y,t) := R_x(aF, aG_0 + t \cdot aG_1)$$ ← GLI ZERI CORRISPONDONO ALLA **PRIMA** COORDINATA DEI PUNTI DI $aF \cap (aG_0 + taG_1)$

$$R_2(x,t) := R_y(aF, aG_0 + t \cdot aG_1)$$ ← GLI ZERI " " **SECONDA** " " " " $aF \cap (aG_0 + taG_1)$

Allora sia $M := d(d-1)$ e siano:

$$P_i =: (1 : \alpha_i : \beta_i) \in \mathcal{U}_0 \qquad Q_j =: (1 : \gamma_j : \delta_j) \in \mathcal{U}_0 \qquad Q(G) =: (1 : \phi(t) : \psi(t)) \in \mathcal{U}_0$$

e siano:

$$R_1(y,t) =: \sum_{k=1}^{M} \overbrace{b_k(t)}^{\in \mathbb{K}[t]} y^k \qquad R_2(x,t) =: \sum_{k=1}^{M} \overbrace{c_k(t)}^{\in \mathbb{K}[t]} x^k$$

Con le informazioni che abbiamo sulle radici otteniamo:

$$\begin{cases} R_1(y,t) = b_M(t)\cdot \prod_{i=1}^{s} (y-\alpha_i)^{m_i(m_i-1)} \cdot \prod_{j=1}^{2d-3} (y-\gamma_j)^1 \cdot (y-\phi(t))^1 \\ R_2(x,t) = c_M(t)\cdot \prod_{i=1}^{s} (x-\beta_i)^{m_i(m_i-1)} \cdot \prod_{j=1}^{2d-3} (x-\gamma_i)^1 \cdot (x-\psi(t))^1 \end{cases}$$

Claim: $\phi(t), \psi(t)$ funzioni **RAZIONALI** in t.

Per vedere questo possiamo sfruttare il fatto che il penultimo coefficiente di un polinomio, i.e. la traccia, per le formule di **VIÈTE** è la somma delle sue radici. $\leftarrow b_{M-j} = e_j(\text{radici})$ POLI SIMM ELEMENTARE

OPERATORE CHE ESTRAE IL COEFFICIENTE DI y^{M-1}

$$b_{M-1}(t) = \underbrace{[y^{M-1}]}_{\text{operatore che estrae il coefficiente di } y^{M-1}}.R_1(y,t) = -b_M(t)\cdot\Big[\underbrace{\sum m_i(m_i-1)\alpha_i + \sum \gamma_j}_{=H(\alpha_i,\gamma_j)} + \phi(t)\Big]$$

Quindi isolando $\phi(t)$ e similmente per $\psi(t)$:

$$\phi(t) = -\frac{b_{M-1}(t)}{b_M(t)} - \overbrace{H(\alpha_i,\gamma_j)}^{\text{costante in } t\,!},\qquad \psi(t) = -\frac{c_{M-1}(t)}{c_M(t)} - H(\beta_i,\delta_j)$$

E quindi sono rapporti di polinomi in t $\Rightarrow$ funzioni razionali.

Allora abbiamo ottenuto

$$\varphi : \mathbb{A}^1 - \Sigma \longrightarrow Z(aF) \subset \mathbb{A}^2$$

TOLTO PUNTI IMPROPRI PIÙ $Z(aF) \cap Z(aG_i)$

$$t \longmapsto (\phi(t), \psi(t))$$

coordinate RAZIONALI!

Questa funzione è genericamente iniettiva (per esercizio, segue sostanzialmente per costruzione perché $t = t(G)$ con $Z_P(G) \in \Lambda_{d-1}$ e $Z_P(G)$ interseca $Z_P(F) \setminus \{P_i, Q_j\}$ in un unico punto $Q = Q(G)$). $\square$

Problema: quante curve algebriche piane di grado d ci sono che passano per N punti dati in posizione generale per deg=d

La risposta $R_{d,N}$ la conosciamo già!

$$R_{d,N} = \begin{cases} \infty & N < N(d,2) \\ 1 & N = N(d,2) \\ 0 & N > N(d,2) \end{cases}$$

SWEET SPOT, perché è la DIM del luogo di curve deg=d piane, allora devo aggiungere $N = \dim(\mathbb{P}^{N(d,2)})$ punti generici di passaggio affinché il sistema lineare abbia $\dim(\Lambda) = 0$ $\Rightarrow \Lambda = \{Q\} \Rightarrow \exists!$ curva

1 VIENE, 0 NON È UN NUMERO MOLTO INTERESSANTE [PER GEOMETRIA ENUMERATIVA]

Problema: quante curve algebriche piane **RAZIONALI** di deg $= d$ ci sono che passano per **N** punti in posizione generale per deg $= d$. Sia $R'_{d,N}$ la risposta.

PERCHÉ gli N punti sono in posizione generale

Se C RAZIONALE $\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} = \binom{d-1}{2} \Rightarrow$ possiamo assumere che C abbia solo nodi semplici [i.e. punti singolari Q con $m(Q)=2$] $\Rightarrow s = \binom{d-1}{2}$

Ogni punto **SINGOLARE FISSATO** corrisponde a **codim $= 3$**, ma ogni punto **SINGOLARE NON FISSATO** " " **codim $= 3-2 = 1$**

NON È PIÙ UN SISTEMA LINEARE!

un $\mathbb{P}^2$ di possibilità

Allora il luogo delle curve deg $= d$ RAZIONALI ha **dim**

$$N(d,2) - s = \frac{d(d+3)}{2} - \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{1}{2}\left[\cancel{d^2}+3d-\cancel{d^2}+3d-2\right] = 3d-1$$

Allora fissiamo $N = 3d-1$. E abbiamo:

$$R'_{d,N} = \begin{cases} \infty & N < 3d-1 \\ N_d \in \mathbb{N} & N = 3d-1 \\ 0 & N > 3d-1 \end{cases}$$

Abbiamo perso la condizione di sistema lineare permettendo ai punti di muoversi, ora non abbiamo più PROIETTIVIZZATI di spazi vettoriali, abbiamo INSIEMI di dimensione ZERO, quindi INSIEMI di PUNTI. **MA DI QUANTI PUNTI?**

THM [**Kontsevich '95**] Sia N_d il numero di curve algebriche piane **RAZIONALI** passanti per **3d-1** punti di $\mathbb{P}^2$ in posiz. generica per deg=d. Allora $\{N_d\}_{d\geq 1}$ è univocamente determinato dalla ricorsione:

$$N_d = \sum_{\substack{a+b=d \\ a\geq 1,\ b\geq 1}} aN_a \cdot bN_b \cdot \left[\binom{3d-4}{3a-2} ab - \binom{3d-4}{3a-3} b^2 \right], \quad N_1 = 1$$

Esempio: (d=2)

$d=2 \Rightarrow a=1 \wedge b=1 \Rightarrow N_2 = 1 \cdot N_1 \cdot 1 \cdot N_1 \cdot \Big[\underbrace{\binom{6-4}{3-2} 1 \cdot 1}_{=2} - \underbrace{\binom{6-4}{3-3} 1^2}_{=1} \Big] = 1$

$\Rightarrow$ $N_2 = 1$ $\Rightarrow$ esiste un unica **cubica razionale** per **5** punti in posizione generale.

Esempio: (d=3)

$d=3 \Rightarrow (a,b) = (2,1), (1,2) \Rightarrow N_3 = 2 N_2 \cdot 1 N_1 \cdot \left[\binom{9-4}{6-2} 2 \cdot 1 - \binom{9-4}{6-3} 1^2 \right]$ $(a,b) = (2,1)$

$+ 1 \cdot N_1 \cdot 2 \cdot N_2 \cdot \left[\binom{9-4}{3-2} 1 \cdot 2 - \binom{9-4}{3-3} 2^2 \right]$ $(a,b) = (1,2)$

$$\Rightarrow N_3 = 2\Big[\underbrace{\cancel{2\binom{5}{4}}}_{10} - \underbrace{\cancel{\binom{5}{3}}}_{10}\Big]_{\to 0} + 2\Big[\underbrace{\underbrace{2\binom{5}{1}}_{10} - 4}_{6}\Big] = 12 \quad \Rightarrow \mathbf{N_3 = 12}$$

ovvero esistono **12 CUBICHE RAZIONALI** (inevitabilmente tutte singolari) passanti per **8 PUNTI** in posizione generale.

Esempio: $(d=4)$

$d=4 \Rightarrow (a,b) = (3,1), (2,2), (1,3)$

$(3,1)$: $\quad 3\cdot N_3 \cdot 1 \cdot N_1 \cdot \left[\binom{8}{7}\cdot 3 - \binom{8}{6}\right] \longrightarrow 36 \cdot [24 - 28] = (-4)\cdot 36$

$(2,2)$: $\quad 2\cdot N_2 \cdot 2 \cdot N_2 \cdot \left[\binom{8}{4}\cdot 4 - \binom{8}{3}\cdot 4\right] \longrightarrow 16 \cdot [70 - 56] = 16 \cdot 14$

$(1,3)$: $\quad 1\cdot N_1 \cdot 3 \cdot N_3 \cdot \left[\binom{8}{1}\cdot 3 - \binom{8}{0}\cdot 9\right] \longrightarrow 36 \cdot [24 - 9] = 15 \cdot 36$

$$\Rightarrow \mathbf{N_4 = 36\cdot 11 + 16 \cdot 14 = 620}$$ Calcolato per la prima volta da **[ZEUTHEN 1873]** (Copenhagen)

ovvero ci sono **620 QUARTICHE RAZIONALI** (tutte singolari) per **11 PUNTI** in posizione generica

Esempio: ($d=5$)

$(4,1)$: $4\cdot 620\cdot\left(\binom{11}{10}4-\binom{11}{9}\right) = 4\cdot 620\cdot[44-55] = -27\,280$

$(3,2)$: $3\cdot 12\cdot 2\cdot\left(\binom{11}{7}6-\binom{11}{6}4\right) = 72\cdot[1980-1848] = 9\,504$

$(2,3)$: $2\cdot 3\cdot 12\left(\binom{11}{4}6-\binom{11}{3}9\right) = 72\cdot[1980-1485] = 35\,640$

$(1,4)$: $4\cdot 620\left(\binom{11}{1}4-\binom{11}{0}16\right) = 4\cdot 620\left[44-16\right] = 69\,440$

$$87\,304 = N_5$$

Calcolato per la prima volta da I. Vainsencher ('95) [J. Alg. Geom.] **STESSO ANNO RICORS. KONTSEVICH**

ovvero ci sono **87.304 QUINTICHE PIANE RAZIONALI** per **14** punti generici (tutte singolari)