

Esame di Programmazione Informatica

14 giugno 2024

Esercizio 1 (17/30)

Si consideri il seguente problema, che è classico nel calcolo delle probabilità:

Il concorrente di un gioco può scegliere tra 3 buste numerate (1,2,3): una contiene un premio, le altre 2 sono vuote. Dopo la scelta, una busta vuota viene eliminata dal gioco: a questo punto il concorrente può scegliere di mantenere (strategia A) oppure di cambiare (strategia B) la scelta iniziale.

Il calcolo delle probabilità di vincita per le due strategie si può calcolare attraverso le due seguenti funzioni MATLAB, assumendo che la busta vincente sia sempre la prima:

Prima funzione: prende come argomento in ingresso un intero tra 1 e 3 che rappresenta la busta scelta dal concorrente, e restituisce due argomenti booleani in uscita:

- il primo indica se il concorrente ha vinto il premio seguendo la strategia A (ossia se la busta scelta è la prima);
- il secondo indica se il concorrente ha vinto il premio seguendo la strategia B (ossia se la busta scelta non è la prima).

Seconda funzione: prende come argomento in ingresso un intero N. Questa funzione richiama N volte la funzione precedente, ogni volta con una busta casuale (utilizzare `randi(3)` che restituisce un intero casuale tra 1 e 3). La funzione restituisce due argomenti in uscita:

- il conteggio del numero di vittorie seguendo la strategia A;
- il conteggio del numero di vittorie seguendo la strategia B.

Implementare quindi le due precedenti funzioni; utilizzare poi l'ultima funzione per calcolare la probabilità di vittoria di ogni strategia, ottenuta dividendo il corrispondente numero di vittorie per N, nei casi N=100, 1000, 10000, 100000. Che probabilità si ottengono? Quale strategia è più conveniente?

Soluzione: per la prima funzione utilizziamo banalmente due confronti diretti:

singola_vittoria.m

```
function [vittoria_A, vittoria_B] = singola_vittoria(busta)
    vittoria_A = busta == 1 ;
    vittoria_B = ~vittoria_A ;
end
```

Per la seconda funzione utilizziamo un ciclo `for` che richiama `N` volte la precedente funzione e conta il numero di vittorie. Prima del ciclo `for` inizializziamo i due conteggi a 0, per poi aggiornarli di volta in volta nel ciclo `for`:

conteggio_vittorie.m

```
function [vittorie_A, vittorie_B] = conteggio_vittorie(N)
    vittorie_A = 0 ;
    vittorie_B = 0 ;
    for i = 1 : N
        busta_scelta = randi(3) ;
        [A, B] = singola_vittoria(busta_scelta) ;
        vittorie_A = vittorie_A + A ;
        vittorie_B = vittorie_B + B ;
    end
end
```

Utilizzo per il calcolo delle probabilità:

```
for N = [100, 1000, 10000, 100000]
    [numero_vittorie_A, numero_vittorie_B] = conteggio_vittorie(N) ;
    prob_A = numero_vittorie_A / N
    prob_B = numero_vittorie_B / N
end
```

ottenendo con buona approssimazione $p(A) = 0.333...$ ($=1/3$) e $p(B) = 0.667...$ ($=2/3$).
Conviene quindi la strategia B.

Esercizio 2 (16/30)

Si considerino le due seguenti formule infinite F1 e F2 per il calcolo di π :

$$\text{F1:} \quad \pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots\right)$$

$$\text{F2:} \quad \pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \dots$$

Scrivere due funzioni MATLAB che prendano entrambe come argomento in ingresso un intero N:

- la prima funzione dovrà restituire come argomento in uscita la somma troncata al N-esimo termine per F1 (somma dei primi N termini);
- la seconda funzione dovrà restituire come argomento in uscita il prodotto troncato al N-esimo termine per F2 (prodotto dei primi N termini).

Mostrare poi come utilizzare le due precedenti funzioni per il calcolo dell'errore rispetto al valore di π disponibile in MATLAB (`pi`) per N=100, 1000, 10000, 100000. Che errori si ottengono?

Soluzione: Procediamo direttamente con un ciclo `for` che somma (o moltiplica) i termini delle due formule, uno alla volta. Nel caso della somma (F1) inizializziamo la somma `s` a 0 (elemento neutro della somma) prima del ciclo `for`, nel caso del prodotto (F2) inizializziamo invece il prodotto `p` a 1 (elemento neutro del prodotto):

formulaF1.m

```
function s = formulaF1(N)
s = 0 ;
for i = 0:N
    numeratore = (-1)^i ;
    denominatore = 2*i+1 ;
    s = s + numeratore/denominatore ;
end
s = 4 * s ;
end
```

formulaF2.m

```
function p = formulaF2(N)
p = 1 ;
for i = 1:N
    t = 2*i ;
    numeratore = t^2 ;
    denominatore = (t-1) * (t+1) ;
    p = p * numeratore/denominatore ;
end
p = 2 * p ;
end
```

Utilizzo nel caso di N=100, 1000, 10000, 100000 con differenze rispetto a π :

```
for N = [100, 1000, 10000, 100000]
    errore_F1 = formulaF1(N) - pi
    errore_F2 = formulaF2(N) - pi
end
```

ottenendo delle differenze via via decrescenti di valore $9.99 \cdot 10^{-3}$, $9.99 \cdot 10^{-4}$, $9.99 \cdot 10^{-5}$, $9.99 \cdot 10^{-6}$ per F1, $-7.85 \cdot 10^{-3}$, $-7.85 \cdot 10^{-4}$, $-7.85 \cdot 10^{-5}$, $-7.85 \cdot 10^{-6}$ per F2.