Lezione 29 - 18/11/2025

1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua

¿ è possibile che $f([0,1]) = [0,1] \cup [2,3]$?

~~sì~~ no $f([0,1])$ può essere solo del tipo $[a,b]$ (o eventualmente $\{a\}$)

f continua mandano intervalli in intervalli (t. valori intermedi)

l'unica immagine può essere solo un intervallo (o un punto se f è costante)

¿ è possibile che $f([0,1]) = [0,+\infty[$?

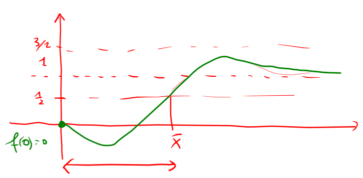
no (anche se $[0,+\infty[$ è un intervallo)

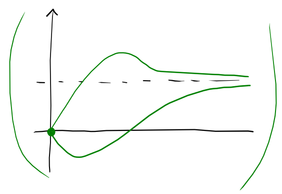
f continua manda $[0,1]$ (che è un compatto) in un compatto (chiuso e limitato)

Es. $\boxed{f : [0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad \text{continua}}$

$f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Provare che f ha minimo assoluto.

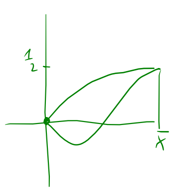




$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \implies \exists \bar{x} : \forall x,\ x > \bar{x},\ f(x) > \frac{1}{2}$.

considero $f_{|[0,\bar{x}]}$ (restringo il dominio a $[0,\bar{x}]$)

¿ questa ha minimo assoluto? Sì per Weierstrass!



¿ il valore minimo assoluto per f su $[0,\bar{x}]$ è minore o uguale a 0?

Sì

domanda: posso dire che il minimo assoluto per f in $[0,\bar{x}]$ è minimo assoluto per f in $[0,+\infty[$?

sì perché oltre $\bar{x}$ $f(x) > \frac{1}{2}$ e $f(x_{min}) \leq 0$.

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE.

oss. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, f sia continua.

continua su E significa continua in tutti i punti di E

cioè $\forall x_0 \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta : \forall x \in E,$

$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| <$

¿ da chi dipende δ? da x_0 e da ε

in generale fissato ε, δ cambia punto per punto,

se invece succede che fissato ε, c'è un δ che va bene per tutti gli x_0, la f si dice uniformemente continua in generale fissato ε, δ cambia punto per punto,

se invece succede che fissato ε, c'è un δ che va bene per tutti gli x_0, la f si dice <u>uniformemente continua</u>

def. sia $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$.

f si dice uniformemente continua se

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E,$

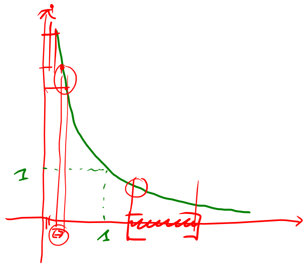
$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

oss. f unif. continua su $E \Rightarrow f$ è continua su E

in generale non vale il viceversa

es. $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



è continua

perché non è unif. continua?

fissiamo $\varepsilon = 1$ ¿ c'è un δ t.c. $|x_1 - x_2| < \delta$ allora $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| < 1$?

no $\quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{1}{n+1}$

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = |n - (n+1)| = |-1| = 1$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

posso rendere x_1 e x_2 vicini quanto voglio e $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$

Teorema (HEINE)

sia $K \neq \emptyset$ compatto di $\mathbb{R}$, $f: K \to \mathbb{R}$ continua

Allora f è <u>unif. continua</u>

CALCOLO DIFFERENZIALE

def. supponiamo $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$

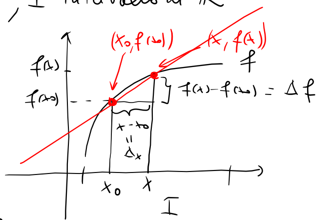
sia $x_0 \in I$.

chiamo rapporto incrementale (per la funzione f, in x_0)

la funzione

$R^f_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto R^f_{x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



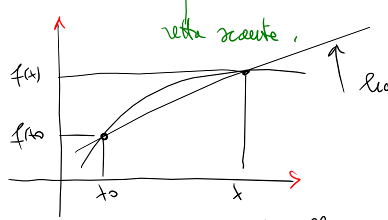
$R^f_{x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ← variazione di f tra x e x_0

← variazione della x tra x e x_0

$= \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

geometricamente: $R^f_{x_0}(x)$ è la pendenza (il coeff. angolare) della retta che passa per $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$

retta secante.



ha pendenza $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

def. sia $f : I \to \mathbb{R}$ (intervallo), $x_0 \in I$.

se esiste $\lim_{x\to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

lo chiamo $f'(x_0)$ derivata di f in x_0

(attenzione: per il momento $f'(x_0)$ può anche essere $+\infty$ o $-\infty$)

def. se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ (cioè se esiste finito $\lim_{x\to x_0} R^f_{x_0}(x)$

se esiste finito il $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$)

f si dice derivabile in x_0

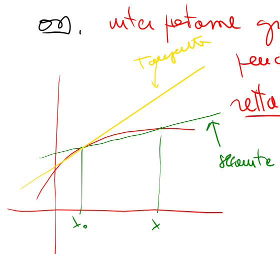
def. se f è derivabile in ogni punto di I

ottengo una nuova funzione $f' : I \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f'(x)$

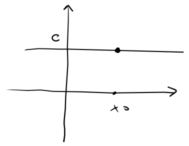
la chiamo (funzione) derivata

oss. interpretazione grafica: $f'(x_0)$ è la pendenza (coeff. angolare) della retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$



derivate di funzioni elementari

1) f costante $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$



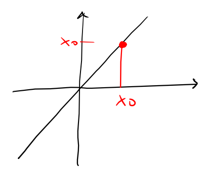
$$R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

$R^f_{x_0}(x) = 0$ (è la costante 0)

$$\lim_{x\to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} 0 = 0$$

la funzione costante è derivabile con derivata uguale a 0 dappertutto.

2) f identità $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ $\qquad f(x) = x$



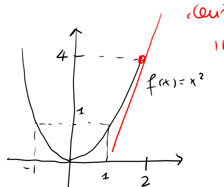
$$R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

$R^f_{x_0}(x)$ è la costante 1

$$\lim_{x\to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} 1 = 1$$

x è derivabile con derivata uguale a 1 in ogni punto.

3) $f(x) = x^2$



$x^2 - x_0^2 = (x-x_0)(x+x_0)$

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x+x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} x+x_0 = 2x_0$$

$f(x)=x^2$ è derivabile (dappertutto) e la derivata vale $2x$

trova la tangente al grafico di $y=x^2$ nel punto $(2,4)$

- la pendenza è $f'(x_0) = 2x_0 = 4$
- passa per $(x_0, f(x_0)) = (2,4)$

$y = mx+q$ con $m = f'(x_0)$ e il passaggio per $(x_0, f(x_0))$

$f(x_0) = m x_0 + q$

$$\begin{cases} m = f'(x_0) \\ f(x_0) = m x_0 + q \end{cases}$$

$f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + q \qquad q = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)(x_0)$$

$$\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$$

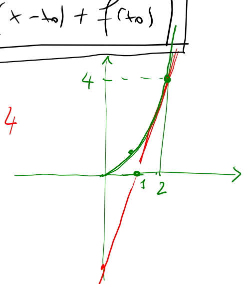
$m = 4$ + passaggio per $(2,4)$

$4 = m\cdot 2 + q$

$4 = 4\cdot 2 + q$

$q = -4$

$y = 4x - 4$



f	f'
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1} ← vale per $n \in \mathbb{Z}$ (se $n<0$, $x \neq 0$)
e^x	e^x
$\lg x$	$\frac{1}{x}$

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

4) $f(x) = x^n$ ← $n>0$

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{\cancel{(x-x_0)}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}}_{\text{sono } n} = n x_0^{n-1}$$

x^n è derivabile con derivata nx^{n-1}

$n>0$

5) $f(x) = \frac{1}{x^n}$

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0} = \frac{x_0^n - x^n}{(x-x_0)x^n x_0^n} = -\frac{(x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}\, x^n x_0^n}$$

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \dots = -\frac{n x_0^{n-1}}{x_0^{2n}} = -\frac{n}{x_0^{n+1}}$$

$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ è derivabile (per $x \neq 0$)

e la derivata è $-n x^{-n-1}$

6) $f(x) = e^x$

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\left(\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \cdot \underbrace{\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}}_{\to 1} = e^{x_0}$$

e^x è derivabile con derivata e^x

7) $f(x) = \lg x$ $\quad f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ($x>0$)

$$R^f_{x_0}(x) = \frac{\lg x - \lg x_0}{x - x_0} = \frac{\lg \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{1}{x_0}}_{\to \frac{1}{x_0}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1}\right)}_{\to 1} = \frac{1}{x_0}$$

resta da calcolare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$$

$\frac{x}{x_0} = y + 1$

$\frac{x}{x_0} - 1 = y$

$\lg$ è derivabile e $(\lg(x))' = \frac{1}{x}$

8) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$R^{f}_{x_0}(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0}$$

prostaferesi $\quad \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$

$$R^{f}_{x_0}(x) = \frac{\cancel{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$\to 1 \qquad \to \cos x_0$

$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen} x$ è derivabile con derivata $\cos x$

$\cos x$ " " " $- \operatorname{sen} x$