

# ISTANTONI in teorie di gauge non-abeliane

Tra tutti i campi ( $\rightarrow$  cammini) con winding number diverso da zero, consideriamo quelli che risolvono le eq. del moto Euclidea  $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$

C'è un modo più semplice (rispetto a risolvere le eq. diff. (1)) per trovare le configurazioni che minimizzano  $S_{YM}$ :

$$S_{YM} = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{In sp. Euclidea})$$

Ricordiamo che  $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}$

Consideriamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \pm *F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} \pm *F^{\mu\nu}) = \\ &= \underbrace{2 \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}_{\geq 0} \pm \underbrace{2 \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} *F^{\mu\nu})}_{\int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = 32\pi^2 w} \end{aligned}$$

(Vno sig con  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  + ch con  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  -)

$\Downarrow$

$$S_{YM} \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |w| \quad (\text{Bogomolnyi Bound})$$

I campi che minimizzano  $S_{YM}$  saranno quelli che saturano il bound, cioè gli t.c.  $S_{YM} = \frac{8\pi^2}{g^2} |w|$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} = \pm *F_{\mu\nu}}$$

(ANTI)-SELF DUAL  
(0)

Qte configurazioni risolvono le eq. del vuoto

$$D^\mu F_{\mu\nu} \stackrel{\uparrow (0)}{=} \pm D^\mu * F_{\mu\nu} \stackrel{\uparrow}{=} 0$$

Identicom. valido

in le Identite di Bianchi.

Configurazioni che hanno AZIONE FINITA sono tali che

$$A_\mu^{(x)} \rightarrow -i U \partial_\mu U^{-1} \quad \text{a } x \rightarrow \infty \quad U \in \Omega$$

infinite  $\uparrow$  ad

(  $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$  a  $x \rightarrow \infty$  affinché integrali in  $S^4$  converga  
 $F' = U F U^{-1}$   $A_\mu \cong 0 \Rightarrow F \cong U 0 U^{-1} = 0$ ;  
 equiv. a meno di transf. di gauge

ovviamente  $F_{\mu\nu} \neq 0$  in qualche regione di  $\mathbb{R}^4$ ,  
 affinché  $S_{YM}$  sia non nulla .)

$\rightsquigarrow$  Il comportamento di  $A_\mu$  all'infinito è descritto da  
 una mappa

$$U : S_\infty^3 \rightarrow G$$

$\rightsquigarrow$  queste mappe sono  
 caratteristiche del  
 gruppo di omotopia  
 $\pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$

(vale  $\forall G$  di Lie, eccetto  
 $SO(4) \quad \pi_3(G) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ )

[ analogo a quando abbiamo considerato  $U : \mathbb{R}_x^3 \rightarrow G \quad U \in \Omega_x$   
 ma ora stiamo considerando  $U$  diverse  $S_x^3$   
 e un diverso spazio delle trasformazioni di gauge. ]

Consideriamo

$$\frac{1}{32\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} d^4x = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \partial_\mu K^\mu =$$

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} (A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta)$$

$$= \int_{S^3_\infty} K^\mu(A) d^3x = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_\infty} \text{tr} (U^{-1} dU)^3 \in \mathbb{Z}$$

↑  
it is a pure gauge  
on  $S^3_\infty$

↓  
we can write the integrand  
in terms of  $U_\infty$

$$\left[ K \propto A dA + \frac{2}{3} A^3 = U^{-1} dU dU^{-1} dU + \frac{2}{3} (U^{-1} dU)^3 = \right. \\ \left. = -U^{-1} dU U^{-1} dU U^{-1} dU + \frac{2}{3} (U^{-1} dU)^3 = -\frac{1}{3} (U^{-1} dU)^3 \right]$$

$$A = U^{-1} dU$$

$$0 = d(U^{-1} U) = dU^{-1} U + U^{-1} dU$$

$$\rightarrow dU^{-1} = -U^{-1} dU U^{-1}$$

]

Consideriamo le connessioni con  $w$  fissato

$$\left( \text{cioè tutte le connessioni con } w = \frac{1}{16\pi^2} \int \text{tr } F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} \right)$$

ci interessa trovare il minimo di  $S_{\text{YM}}$  in pts dove, cioè conf. s.c.

$$F_{\mu\nu} = \pm * F_{\mu\nu}$$

Qte conf. sono chiamate **INSTANTONI**

(sono localizzate attorno a un pts di  $\mathbb{R}^4$ )

Contribuiscono al P.I. con un FATTORE CARATTERISTICO

$$e^{-S_{\text{inst}}} = e^{-\frac{8\pi^2 |w|}{g^2}} e^{i\theta w}$$

↑  
reale perché  
siamo in signature  
Euclidea

↑  
rimane complesso  
anche in signature  
Euclidea

## SINGOLO INSTANTONE in $SU(2)$

Consideriamo  $G = SU(2)$ . Vogliamo risolvere l'eq

$$F_{\mu\nu} = * F_{\mu\nu} \quad \text{con } w=1$$

Asintoticamente  $A_\mu$  deve tendere a una pura gauge, cioè

$$A_\mu(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -i U(x) \partial_\mu U^{-1}(x)$$

↑  
dipende dalle coord angolari  $\frac{x^\mu}{\sqrt{x^2}}$

Esaudiamo  $U(x) = \frac{x_\mu \sigma^\mu}{\sqrt{x^2}} \quad \sigma^\mu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = (\sigma^0, \sigma^i)$

Allora  $A_\mu(x) = -i f(x) U \partial_\mu U^{-1}$  dove  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$

Prendiamo  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + \rho^2}$  e verifichiamo che  $A_\mu$  corrisponde

risolvere l'eq.  $F_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu}$ .

Usiamo:  $\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu = \delta^{\mu\nu} \mathbb{1} + \underbrace{\sum_S^{\mu\nu}}_{\equiv \Sigma^{\mu\nu}} \sigma^S$  dove  $\Sigma$  è antisim. e self-duale

Antisim:  $\left. \begin{aligned} \sigma^i \bar{\sigma}^j &= \sigma_p^i \sigma_p^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i \epsilon^{ijk} \sigma_p^k \\ \sigma^0 \bar{\sigma}^j &= \bar{\sigma}^j = i \sigma_p^j \\ \sigma^j \bar{\sigma}^0 &= \sigma^j = -i \sigma_p^j \\ \sigma^0 \bar{\sigma}^0 &= \mathbb{1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sum_0^{ij} &= 0 & \sum_k^{ij} &= -\epsilon^{ijk} \\ \sum_0^{0j} &= 0 & \sum_k^{j0} &= \delta_k^j \\ & & & \text{"} \\ & & & -\sum_k^{0j} \end{aligned}$

$\Sigma^{\mu\nu}: \begin{aligned} \sum^{ij} &= i \epsilon^{ijk} \sigma_p^k \\ \sum^{i0} &= -i \sigma_p^i \end{aligned}$

Self-duale:  $\Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}$

$\Sigma^{01} = \frac{1}{2} \epsilon^{01\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} 2 \times \epsilon^{0123} \Sigma^{23} = \epsilon^{0123} i \epsilon^{231} \sigma_p^1 = i \sigma_p^1 = \Sigma^{01}$

$\Sigma^{12} = \frac{1}{2} \epsilon^{12\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} 2 \times \underbrace{\epsilon^{1230}}_{=-1} \Sigma^{30} = -\epsilon^{123} (-i) \sigma_p^3 = \Sigma^{12}$

$U \partial_\mu U^{-1} = \frac{x_\nu \sigma^\nu}{\|x\|} \partial_\mu \left( \frac{x_\rho \bar{\sigma}^\rho}{\|x\|} \right) = \frac{x_\nu \sigma^\nu}{\|x\|} \left\{ \frac{\bar{\sigma}^\mu}{\|x\|} - \frac{x_\rho \bar{\sigma}^\rho}{\|x\|^3} x^\mu \right\} =$

$= \frac{1}{\|x\|^2} \left\{ \underline{x_\nu} (\underline{\delta^{\mu\nu}} + \underline{\Sigma^{\nu\mu}}) - \underbrace{(x_\nu x_\rho)}_{\text{sym.}} \left( \underbrace{\delta^{\nu\rho}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\Sigma^{\nu\rho}}_{\text{antisym.}} \right) \frac{x_\mu}{\|x\|^2} \right\}$

$\cancel{x_\mu} + x_\nu \Sigma^{\nu\mu} - \cancel{x_\mu}$

$= \frac{x_\nu \Sigma^{\nu\mu}}{x^2}$

$A_\nu(x) = -i \frac{x_\mu \Sigma^{\mu\nu}}{x^2 + \rho^2}$

$\hookrightarrow F_{\mu\nu}:$

$$\partial_\mu A_\nu = -i \frac{\sum_{\mu\nu}}{x^2 + g^2} + i \frac{x_\alpha \sum^{\alpha\nu}}{(x^2 + g^2)^2} 2x_\mu$$

↓

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &= -\frac{2i \sum_{\mu\nu}}{x^2 + g^2} + \frac{2i}{(x^2 + g^2)^2} (x_\mu x_\alpha \sum_{\alpha\nu} - x_\nu x_\alpha \sum_{\alpha\mu}) \\ &= \frac{2i}{x^2 + g^2} \left( -\sum_{\mu\nu} + \frac{1}{x^2 + g^2} (x_\mu x_\alpha \sum_{\alpha\nu} - x_\nu x_\alpha \sum_{\alpha\mu}) \right) \end{aligned}$$

Per calcolare  $i[A_\mu, A_\nu]$  usiamo la seguente proprietà:

$$[\sum_{\alpha\mu}, \sum_{\beta\nu}] = 2\delta_{\alpha\nu} \sum_{\mu\beta} + 2\delta_{\mu\beta} \sum_{\alpha\nu} - 2\delta_{\alpha\beta} \sum_{\mu\nu} - 2\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} i[A_\mu, A_\nu] &= -\frac{i}{(x^2 + g^2)^2} [x_\alpha \sum_{\alpha\mu}, x_\beta \sum_{\beta\nu}] = \\ &= \frac{2i}{(x^2 + g^2)^2} \underbrace{x_\alpha x_\beta}_{\text{sym}} (\delta_{\alpha\beta} \sum_{\mu\nu} + \cancel{\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha\beta}}_{\text{antisym.}} - \delta_{\alpha\nu} \sum_{\mu\beta} - \delta_{\mu\beta} \sum_{\alpha\nu}) \\ &= \frac{2i}{(x^2 + g^2)^2} (x^2 \sum_{\mu\nu} + \underbrace{x_\nu x_\beta \sum_{\beta\mu}}_{\text{wavy}} - \underbrace{x_\mu x_\alpha \sum_{\alpha\nu}}_{\text{wavy}}) \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] = -\frac{2i}{x^2 + g^2} \sum_{\mu\nu} \left( 1 - \frac{x^2}{x^2 + g^2} \right)$$

$$= -\frac{2i g^2}{(x^2 + g^2)^2} \sum_{\mu\nu}$$

localizzato attorno  
con un'ampiezza  $\sim g$   
 $x=0$   
 $\sim g$

self-dual  $\Rightarrow F_{\mu\nu}$  è self-dual,  
cioè minimizza  $S_{\text{YM}}$

Calcoliamos il winding number  $w$ .

$$\text{Tr} (\bar{\Sigma}_{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}) = 2 \text{Tr} \left( \sum_{i=1,2,3}^2 \sigma_i + \sum_{ij=12,23,31}^2 \right) = -6 \text{Tr} (\mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2) = -24$$

$$\Sigma_{\mu\nu}^2 = -\mathbb{1}$$

$$\underbrace{\epsilon^{ijk} \epsilon^{jkh}}_{\delta^{kh}} (i\sigma_p^k)(i\sigma_p^h) = -\mathbb{1}_2$$

$$w = \frac{1}{16\pi^2} \int \text{Tr} (F_{\mu\nu} + \overset{\text{self-dual}}{F_{\mu\nu}}) = \frac{1}{16\pi^2} \int \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \text{Tr} (\Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}) \int d^4x \frac{(-2i)^2 g^4}{(x^2 + g^2)^4} =$$

$$= \frac{+24 \cdot (+4)}{16\pi^2} g^4 \int d^4x \frac{1}{(x^2 + g^2)^4}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + a^2)^A} = \frac{\Gamma(A - d/2)}{(a^2)^{A-d/2} (4\pi)^{d/2} \Gamma(A)} \Rightarrow \int \frac{d^4x}{(x^2 + g^2)^4} = \frac{\Gamma(4-2) (2\pi)^4}{(g^2)^{4-2} (4\pi)^2 \Gamma(4)}$$

$d=4 \quad A=4 \quad a=g$

$\Gamma(n+1) = n! \Rightarrow \Gamma(2) = 1$   
 $\Gamma(4) = 3!$

$$w = \frac{6g^4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^4}{g^4 \pi^2 3!} = 1$$

Per  $w > 1$  le soluzioni è molto più complicate.  
 Però c'è un'approssimazione (appos. di gas diluito)

$$A_{\mu\nu}^{w=1} \Big|_{x=x_1} + A_{\mu\nu}^{w=1} \Big|_{x=x_2} \simeq A_{\mu\nu}^{w=2}$$

se  $\|x_1 - x_2\| \gg g$



→ Nota: le soluzioni istantanee contengono dei parametri  
 ↳ famiglie di soluzioni "zero modi"

es.  $w=1$

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2 + g^2}$$

i parametri sono  $x_0, g$

Mostriamo ora che la soluz. istantanea tratta (con  $w=1$ ) è un cammino in  $\mathcal{Q} = \mathcal{A} / \mathcal{G}_x$  e in particolare un loop con winding number 1.

↓  
 Prima di tutto ci mettiamo nella gauge  $A_0 = 0$ . La soluz. istant. tratta non è in pt gauge → dobbiamo applicare una transf. di gauge per portare  $A_0 \rightarrow A_0 = 0$ .

$$A_0 = -i \frac{x_i \sum \sigma_i}{x^2 + g^2} = -i \frac{x_i \sum \overset{-i\sigma_i}{\sigma_i}}{x^2 + g^2} = -\frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{x^2 + g^2}$$

*antisim*      *matrici di Pauli*

Consideriamo la transf. di gauge  $W = e^{-i \frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{|\bar{x}|} \zeta(x)}$

$$\text{dove } \zeta(x) = -\frac{|\bar{x}|}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}} \left( \frac{\pi}{2} + \text{arctg} \left( \frac{x_0}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}} \right) \right)$$

$$\bullet \partial_0 \zeta = -\frac{|\bar{x}|}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}} \frac{1}{1 + \frac{x_0^2}{|\bar{x}|^2 + g^2}} \frac{1}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}} = -\frac{|\bar{x}|}{x_0^2 + |\bar{x}|^2 + g^2}$$

$$\bullet \partial_0 W^{-1} = W^{-1} \left( -i \frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{|\bar{x}|} \partial_0 \zeta \right) = i W^{-1} \frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{x^2 + g^2} + W^{-1} i \frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{|\bar{x}|} \frac{|\bar{x}|}{x^2 + g^2}$$

$$\bullet W \bar{x} \cdot \bar{\sigma} W^{-1} = \bar{x} \cdot \bar{\sigma}$$

*commutano*

$$\bullet W \xrightarrow{x_0 \rightarrow -x_0} \mathbb{1} \quad W \xrightarrow{x_0 \rightarrow +x_0} e^{i \pi \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{x}}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}}} \equiv -\tilde{W}(\bar{x})$$

$$\rightarrow A_0' = \underbrace{W A_0 W^{-1}}_{= A_0} - i W \partial_0 W^{-1} = -\frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{x^2 + y^2} - i W W^{-1} (i) \frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{x^2 + y^2} = 0$$

$$A_i' = W A_i W^{-1} - i W \partial_i W^{-1}$$

Cammino nella gauge  $A_0' = 0$  è descritto dalla funz.

$$A_i'(\bar{x}, x_0) \quad \leftrightarrow \quad \text{analogo} \quad \gamma^\mu(t) \text{ in sp. } \mathbb{R}^4 \text{ (per esempio)}$$

$\uparrow$  parametro della curva  
 $\gamma: \mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^4$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} Q = \mathcal{A} / \Omega_x$$

$\uparrow$  parametro di  $A_i'(\bar{x})$   
 $x_0$

Verifichiamo cosa succede agli estremi:

$$A_i' (x_4 \rightarrow -\infty) = A_i(\bar{x}) \quad (*)$$

$$A_i' (x_4 \rightarrow +\infty) = \tilde{W} A_i \tilde{W}^{-1} - i \tilde{W} \partial_i \tilde{W}^{-1} = A_i^{\tilde{W}}(\bar{x})$$

Questo è un loop in  $Q = \mathcal{A} / \Omega_x$  se  $\tilde{W} \in \Omega_x = \left\{ \text{map. } \mathbb{R}^3 \rightarrow G \right.$   
 $\left. \text{t.c. } g \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \infty} \mathbb{1} \right\}$

$$\tilde{W} = -e^{i\pi \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \infty} -e^{+i\pi \bar{\sigma} \cdot \hat{x}} = -(\cos(\pi) \mathbb{1} + i \sin(\pi) \bar{\sigma} \cdot \hat{x}) = \mathbb{1} \Rightarrow \tilde{W} \in \Omega_x$$

$\frac{\bar{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \equiv \hat{x}$

$\Rightarrow (*)$  è un loop in  $Q$

$\rightsquigarrow$  uno può provare che il winding number calcolato con  $\tilde{W}$  è  $= 1$ !

↓

Dato un campo  $A_\mu(x_0, \vec{x})$  e quel campo con  $x_4$

$$\frac{1}{16\pi^2} \int \text{tr} F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} = w[\tilde{W}]$$

$\uparrow$   
 winding number

$$A_\mu \leftrightarrow n \in \pi_3(S^3)$$

$\swarrow$   $SU(2)$   
 $\uparrow$   $S^3$  e  $x_0^2 + \vec{x}^2 \rightarrow \infty$

$\downarrow$   
 cammino  
 def da  $\tilde{W}$

$$\leftrightarrow n \in \pi_3(S^3)$$

$\swarrow$   $SU(2)$   
 $\uparrow$   $S^3$  e  $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$  compatto.