Nucleo e immagine caratterizzano iniettività e suriettività.

Prop.: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare allora:

1. f è iniettiva $\iff \ker f = \{0\}$
2. f è suriettiva $\iff \operatorname{im} f = V'$

Dim.: 2. f è suriettiva $\iff \forall v' \in V', \exists v \in V : f(v) = v'$

$$\iff \operatorname{im} f = V'$$

1. "$\Rightarrow$" supponiamo che f sia iniettiva; questo significa che, se $v, w \in V$ sono tali che $f(v) = f(w)$, allora $v = w$; consideriamo quindi $v \in \ker f$, allora per definizione $f(v) = 0$; d'altro canto, sappiamo che $f(0) = 0$, quindi

$$f(v) = 0 = f(0)$$

dato che f è iniettiva deve essere $v = 0$, dunque $\ker f = \{0\}$

"$\Leftarrow$" supponiamo che $\ker f = \{0\}$; siano $v, w \in V$ tali che $f(v) = f(w)$; se mostriamo che $v = w$, allora f è iniettiva; dato che $f(v) = f(w)$, aggiungendo $-f(w)$ a entrambi i membri otteniamo $f(v) - f(w) = 0$, quindi per linearità

$$f(v - w) = 0$$

allora $v - w \in \ker f$; visto che per ipotesi $\ker f = \{0\}$, otteniamo $v - w = 0$, ovvero $v = w$; pertanto f è iniettiva $\square$

Teorema: (teorema di struttura per applicazioni lineari)

siano V e V' due spazi vettoriali su K di dimensione finita (non è necessario che la dimensione sia la stessa) sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e siano $v_1', \dots, v_n' \in V'$ vettori qualsiasi (l'unica richiesta su questi vettori è che siano tanti quanti i vettori di $\mathcal{B}$, senza nessuna altra condizione); allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \to V'$ tale che $f(v_i) = v_i'$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Dim.: dimostriamo innanzitutto che, se tale f esiste, è unica; supponiamo quindi che esistano $f, g : V \to V'$ tali che $f(v_i) = v_i'$ e $g(v_i) = v_i'$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ con f e g applicazioni lineari; dimostriamo che $f = g$, ovvero che $\forall v \in V$, vale che $f(v) = g(v)$; sia $v \in V$, allora possiamo scrivere $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ perché $\mathcal{B}$ è una base di V; allora

$$
\begin{aligned}
f(v) &= f(\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\
&\overset{f \text{ è lineare}}{=} \lambda_1 \cdot f(v_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n) \\
&\overset{\text{ipotesi su } f}{=} \lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n' \\
&\overset{\text{ipotesi su } g}{=} \lambda_1 \cdot g(v_1) + \dots + \lambda_n g(v_n) \\
&\overset{g \text{ è lineare}}{=} g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\
&= g(v)
\end{aligned}
$$

pertanto l'unicità è dimostrata; dimostriamo ora l'esistenza di una tale applicazione lineare; la parte precedente della dimostrazione ci suggerisce di definire f nel modo seguente: se $v \in V$, scriviamo

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

e definiamo

$$f(v) := \lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n'$$

notiamo preliminarmente che f è ben definita dal momento che la scrittura di un vettore come combinazione lineare degli elementi di una base è unica; dimostriamo ora che f così definita è lineare e soddisfa $f(v_i) = v_i'$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$;

i. mostriamo che f è lineare

1. siano $v, w \in V$, mostriamo che $f(v + w) = f(v) + f(w)$; scriviamo $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ e $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ allora

$$
\begin{aligned}
v + w &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \\
&= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n
\end{aligned}
$$

allora

$$
\begin{aligned}
f(v) + f(w) &= \lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n' + \mu_1 v_1' + \dots + \mu_n v_n' \\
&= (\lambda_1 + \mu_1) v_1' + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n' \\
&= f(v + w)
\end{aligned}
$$

2. sia $v \in V$ e $\lambda \in K$, e scriviamo $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, allora $\lambda \cdot v = (\lambda \cdot \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \cdot \lambda_n) v_n$, pertanto

$$
\begin{aligned}
f(\lambda \cdot v) &= (\lambda \cdot \lambda_1) v_1' + \dots + (\lambda \cdot \lambda_n) \cdot v_n' \\
&= \lambda \cdot (\lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n') \\
&= \lambda \cdot f(v)
\end{aligned}
$$

ii. dimostriamo ora che $f(v_i) = v_i'$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$; vale che

$$v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

allora per definizione

$$
\begin{aligned}
f(v_i) &= 0 \cdot v_1' + \dots + 0 \cdot v_{i-1}' + 1 \cdot v_i' + 0 \cdot v_{i+1}' + \dots + 0 \cdot v_n' \\
&= v_i'
\end{aligned}
$$

Esempio: consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la base standard $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora per il teorema di struttura esiste un'unica applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(e_1) = w_1$ e $f(e_2) = w_2$; l'applicazione lineare f agisce in questo modo: se $v \in \mathbb{R}^2$, allora $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; allora $v = a e_1 + b \cdot e_2$, quindi $f(v) = a \cdot w_1 + b \cdot w_2$

ovvero

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a \\ -2a + 4b \\ 3a + b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

pertanto $f = L_A$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Oss.: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali su K e supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ sia un sistema di generatori per V; allora gli elementi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$; infatti se $v' \in \operatorname{im} f$, allora per definizione esiste $v \in V$ tale che $f(v) = v'$, per ipotesi è possibile scrivere $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, quindi

$$
\begin{aligned}
v' = f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\
&= \lambda_1 \cdot f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)
\end{aligned}
$$

pertanto v' è combinazione lineare di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ e dunque questi ultimi sono un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$

Oss.: consideriamo una matrice $A \in M_{m,n}(K)$, allora abbiamo:

$$L_A : K^n \to K^m$$

se in K^n consideriamo la base standard $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ con

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (i)$$

allora $A \cdot e_i = A^{(i)}$ (i-esima colonna); in altre parole $L_A(e_i) = A^{(i)}$; dato che $\mathcal{E}$ è una base di K^n, essa è in particolare un sistema di generatori per K^n, quindi

$$
\begin{aligned}
\operatorname{im} L_A &= \operatorname{span}(L_A(e_1), \dots, L_A(e_n)) \\
&= \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})
\end{aligned}
$$

perché $L_A(e_1), \dots, L_A(e_n)$ è un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$, quindi

$$
\begin{aligned}
\dim \operatorname{im} L_A &= \dim \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \\
&= \operatorname{rg} A
\end{aligned}
$$

Def.: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, allora definiamo il rango di f come $\dim \operatorname{im} f$.

Teorema: (Teorema di dimensione per applicazioni lineari)

sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita; allora

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

ovvero

$$\dim V = \dim(\ker f) + \operatorname{rg}(f)$$

Dim.: sia $n := \dim V$ e sia $\mathcal{B}_{\ker}$ una base di $\ker f$, con $\mathcal{B}_{\ker} = \{v_1, \dots, v_k\}$ quindi $k = \dim \ker f$; l'obiettivo diviene dimostrare che

$$\dim(\operatorname{im} f) = n - k$$

per farlo, esibiremo una base di $\operatorname{im} f$ costituita da $(n-k)$ elementi; cominciamo notando che $\ker f \subseteq V$ e che, dato che $v_1, \dots, v_k$ sono una base di $\ker f$, essi sono in particolare linearmente indipendenti; per il Teorema di completamento a una base, è possibile completare $v_1, \dots, v_k$ a una base $\mathcal{B}$ di V, quindi

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} \quad (\text{ricordiamo } n = \dim V)$$

consideriamo quindi $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ e dimostriamo che questi $(n-k)$ vettori sono una base di $\operatorname{im} f$.

i. dimostriamo che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti; supponiamo dunque che una loro combinazione lineare sia nulla:

$$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$$

e dimostriamo che $\lambda_{k+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$; per linearità vale che

$$f(\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n) = 0$$

pertanto $(\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n) \in \ker f$ e pertanto tale vettore è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}_{\ker}$:

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

per certi $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$; quindi

$$-\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

notiamo che quest'ultima è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ che è uguale a zero e dato che $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V, e quindi in particolare sono linearmente indipendenti, pertanto deve essere $-\lambda_1 = 0, \dots, -\lambda_k = 0, \lambda_{k+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$, il che prova che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

ii. dimostriamo che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$; sappiamo che $v_1, \dots, v_n$ è una base di V, quindi $v_1, \dots, v_n$ sono un sistema di generatori di V, quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori di $\operatorname{im} f$; ricordando che $v_1, \dots, v_k \in \ker f$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{im} f &= \operatorname{span}(\underbrace{f(v_1)}_{=0}, \dots, \underbrace{f(v_k)}_{=0}, f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)) \\
&= \operatorname{span}(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))
\end{aligned}
$$

il che significa che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$.