__Esempio__: sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare; allora sicuramente f non è suriettiva; infatti, se lo fosse, avremmo $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^4$; ora, vale che $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, quindi per il teorema di dimensione avremmo

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{\dim \ker f}_{\geq 0} + \underbrace{\dim \underbrace{\operatorname{im} f}_{\mathbb{R}^4}}_{4}$$

il che è assurdo.

__Esercizio__: dimostrare che un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ non può essere iniettiva.

__Oss__: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e consideriamo il sistema lineare omogeneo $AX = 0$; interpretiamo le soluzioni di questo sistema in termini dell'applicazione lineare L_A

$$\begin{aligned} \{\text{soluzioni di } AX = 0\} &= \{ s \in K^n : A \cdot s = 0 \} \\ &= \{ s \in K^n : L_A(s) = 0 \} \\ &= \ker L_A \end{aligned}$$

__Cor__: sia $A \in M_{m,n}(K)$, allora la dimensione del sottospazio vettoriale $W \subseteq K^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad A, ovvero $AX = 0$, è $n - rg(A)$; infatti vale che

$$L_A : K^n \to K^m$$

e per il teorema di dimensione

$$\underbrace{\dim K^n}_{n} = \dim \underbrace{\ker L_A}_{W} + \underbrace{\dim \operatorname{im} L_A}_{rg(A)}$$

pertanto $n = \dim W + rg(A)$, ovvero $\dim W = n - rg(A)$.

__Oss__: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e consideriamo $L_A : K^n \to K^m$; dato $b \in K^m$, interpretiamo cosa significhi che $b \in \operatorname{im} L_A$

$$\begin{aligned} b \in \operatorname{im} L_A &\Leftrightarrow \text{esiste } s \in K^n : L_A(s) = b \\ &\Leftrightarrow \text{esiste } s \in K^n : A \cdot s = b \\ &\Leftrightarrow \text{il sistema lineare } AX = b \text{ è compatibile} \end{aligned}$$

__Cor__: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e supponiamo che $\dim V = \dim V'$; allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. f è iniettiva
2. f è suriettiva.

Dim: 1. $\Rightarrow$ 2. supponiamo che f sia iniettiva e dimostriamo che f è suriettiva; dato che f è iniettiva, $\ker f = \{0\}$, quindi per il teorema di dimensione

$$\dim V = \underbrace{\dim \ker f}_{=0} + \dim \operatorname{im} f$$

dunque $\dim V = \dim \operatorname{im} f$; d'altro canto, $\dim V = \dim V'$ per ipotesi, pertanto $\operatorname{im} f \subseteq V'$ e $\dim \operatorname{im} f = \dim V'$, il che implica $\operatorname{im} f = V'$, ovvero f è suriettiva.

2. $\Rightarrow$ 1. supponiamo che f sia suriettiva e dimostriamo che f è iniettiva; dato che f è suriettiva, $\operatorname{im} f = V'$; per il teorema di dimensione

$$\dim V = \dim \ker f + \underbrace{\dim \underbrace{\operatorname{im} f}_{V'}}_{= \dim V \text{ per ipotesi}}$$

quindi $\dim \ker f = 0$, ovvero $\ker f = \{0\}$, il che implica che f è iniettiva.

__Cor__: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e supponiamo che $\dim V = \dim V'$; allora

$$\begin{aligned} f \text{ è iniettiva} &\Leftrightarrow f \text{ è suriettiva} \\ &\Leftrightarrow f \text{ è biiettiva} \\ &\Leftrightarrow f \text{ è invertibile} \end{aligned}$$

Associamo ora una matrice a un'applicazione lineare.

__Def__: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e scriviamo $n = \dim V$ ed $m = \dim V'$; sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $\mathcal{C}$ una base di V' e scriviamo

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$$

definiamo la __matrice associata__ a f __rispetto alle basi__ $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ come la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \in M_{m,n}(K)$ ottenuta nel modo seguente: per ogni $v_i \in \mathcal{B}$ consideriamo $f(v_i) \in V'$ e scriviamo $f(v_i)$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{C}$, ovvero

$$f(v_i) = \alpha_{1i} w_1 + \dots + \alpha_{mi} w_m$$

scriviamo le coordinate di $f(v_i)$ come un vettore colonna, e questa sarà la i-esima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \text{coordinate di } f(v_1) \text{ risp. a } \mathcal{C} & \cdots & \text{coordinate di } f(v_n) \text{ risp. a } \mathcal{C} \end{pmatrix}$$

__Esempio__: consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

si verifica che f è lineare; consideriamo sia nel dominio che nel codominio la base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$, ovvero scegliamo

$$\mathcal{B} = \mathcal{E}, \quad \mathcal{C} = \mathcal{E} \qquad \mathcal{E} = \{e_1, e_2\} \text{ con}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per costruire $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ dobbiamo calcolare $f(e_1)$ ed $f(e_2)$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \\ f(e_2) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 \end{aligned}$$

pertanto

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

__Esempio__: sia $f: V \to V'$ l'applicazione lineare nulla, ovvero quella che associa a ogni vettore $v \in V$ il vettore $0 \in V'$; allora, qualsiasi siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ vale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero la matrice associata all'applicazione nulla è la matrice nulla.