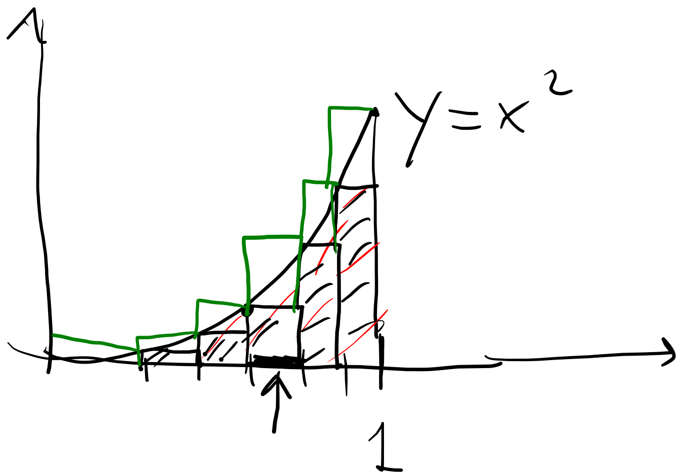
18 Novembre



Scomponiamo $[0,1]$ in n intervalli di lunghezza $\frac{1}{n}$

$$[0,\tfrac{1}{n}] \cup [\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n}] \cup \dots \cup [\tfrac{n-1}{n},\tfrac{n}{n}]$$

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

Area della regione sotto il grafico di x^2 tra 0 e 1 $= \frac{1}{3}$

$$\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \longrightarrow$$

idem

Integrale di Darboux

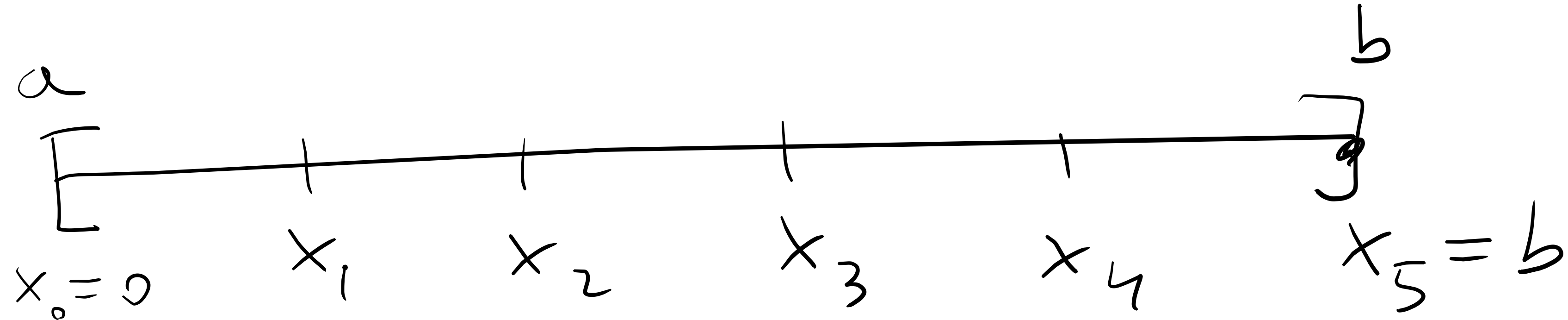
Def Sia $[a,b]$ chiuso e limitato.
Una decomposizione di $[a,b]$ è il dato di una famiglia di punti in $[a,b]$

Δ $\quad x_0 = a < x_1 < \dots\dots < x_n = b$.

La scomposizione è in intervalli

$$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] = [a,b]$$

$$|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n+1}\}$$



Def Date due decomposizioni

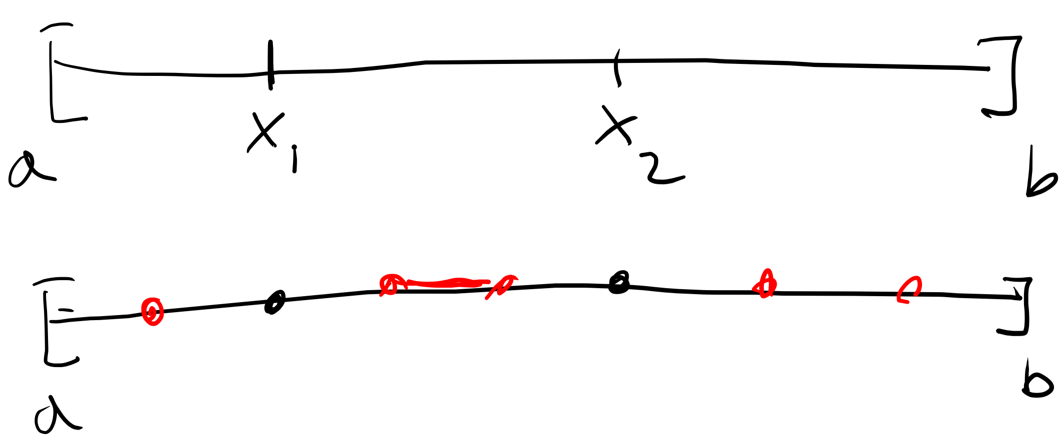
$\Delta \qquad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\Delta' \qquad a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$

diciamo che Δ' è un raffinamento di Δ quando $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$

Δ

Δ'



$\Delta' \preceq \Delta$

Se $\quad \Delta' \preceq \Delta \Rightarrow |\Delta'| \le |\Delta|$

Consideremo una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata.

1) $\sup f([a,b]) < +\infty$

$\inf f([a,b]) > -\infty$

2) $\exists$ m, M in $\mathbb{R}$ t.c. $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$

3) $\exists$ $M > 0$ t.c. $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$

Sia Δ : $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$

Pongo

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j]) \quad \left(\leq M \text{ (la } M \text{ di 2)} \right)$$

$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\inf f([x_{j-1}, x_j])}_{\geq m \text{ (l'}m\text{ di 2)}}$$

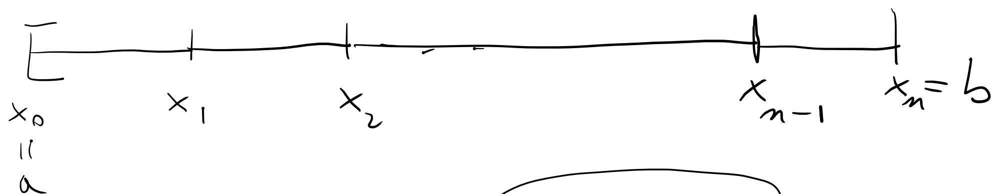
Esercizio. Se $m \leq f(x) \leq M$ in $[a,b]$ dimostrare

che $m(b-a) \leq s(\Delta) \leq S(\Delta) \leq M(b-a)$

$$\check{S}(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

Sia $f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$



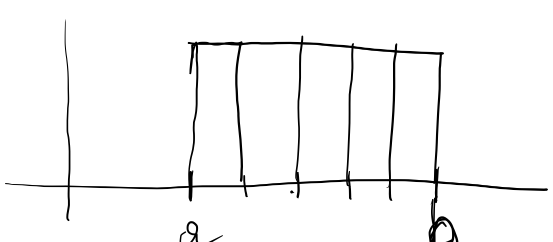
$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup \{c\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; c = c \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})$$

$$= c\left(\cancel{x_1} - x_0 + x_2 - \cancel{x_1} + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}\right)$$

$$= c\,(x_n - x_0) = c\,(b - a)$$



$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf\{c\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) c = c(b-a)$$

$$S(\Delta) = s(\Delta) = \underline{c(b-a)}$$

$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\sup D([x_{j-1}, x_j])}_{=1}$$

$$D([x_{j-1}, x_j]) = \{1, 0\}$$

$$= b - a$$

$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot \overbrace{\inf D([x_{j-1}, x_j])}^{0} = 0$$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b].$$

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; f(x_j)$$

$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; f(x_{j-1})$$

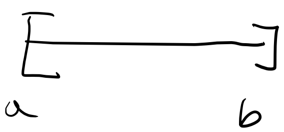
Lemma Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e siano Δ e Δ' due decomposizioni con $\Delta' \preceq \Delta$ (Δ' un raffinamento di Δ).

Allora si ha

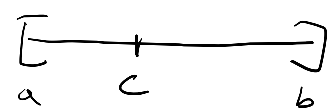
$$s(\Delta)\le s(\Delta')\le S(\Delta')\le S(\Delta)$$

Dim (Parziale) Consideriamo il caso in cui

Δ $\quad a<b$



Δ' $\quad a<c<b$



$$S(\Delta)=(b-a)\sup f([a,b])$$

$$S(\Delta')=(c-a)\underbrace{\sup f([a,c])}_{\le \sup f([a,b])}+(b-c)\underbrace{\sup f([c,b])}_{\le \sup f([a,b])}$$

$$f([a,c])\subseteq f([a,b])$$
$$\sup f([a,c])\le \sup f([a,b])$$

$$f([c,b])\subseteq f([a,b])$$
$$\sup f([c,b])\le \sup f([a,b])$$

$$\le (c-a)\sup f([a,b])+(b-c)\sup f([a,b])$$
$$=(b-a)\sup f([a,b])=S(\Delta)$$

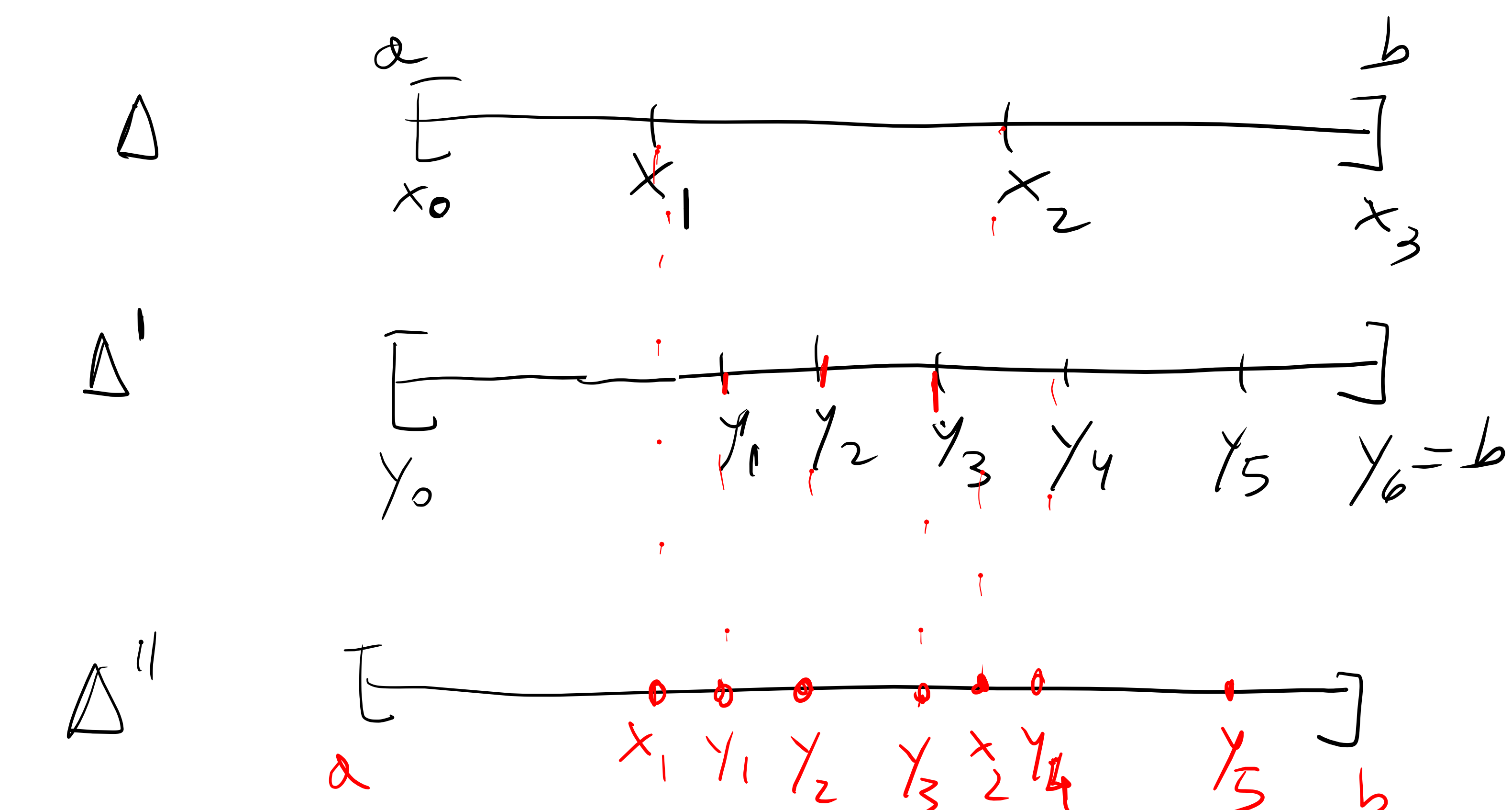
$$S(\Delta')\le S(\Delta)$$

Lemma Date due decomposizioni

Δ $\quad x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Δ' $\quad y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$

$\exists$ una decomposizione Δ'' più raffinata di entrambe.



Corollario Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e siano Δ e Δ' due decomposizioni. Si ha

$$s(\Delta) \leq S(\Delta')$$

Dim Sia Δ'' una raffinamento di Δ e di Δ'.
Allora, per un lemma precedente

$$s(\Delta) \leq s(\Delta'') \leq S(\Delta'') \leq S(\Delta')$$

Osservazione Il corollario si esprime dicendo che

$$\{ s(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D} \} \quad e \quad \{ S(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D} \}$$

sono due insiemi separati

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup \{ s(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D} \}$$ è l'integrale inferiore di f in $[a,b]$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf \{ S(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D} \}$$ è l'integrale superiore di f in $[a,b]$.

$$s(\Delta) \leq S(\Delta') \qquad \forall\, \Delta' \text{ e } \forall\, \Delta \text{ in } \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(\Delta') \qquad \forall\, \Delta' \in \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

Esempio $f(x) = c$ in $[a,b]$

$\forall \Delta$

$$S(\Delta) = c(b-a)$$

$$\inf\{S(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\} = \inf\{c(b-a) : \Delta \in \mathcal{D}\}$$

$$= \inf\{c(b-a)\} = c(b-a) = \overline{\int_a^b} c \, dx$$

$$s(\Delta) = c(b-a)$$

$$\sup\{s(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\} = \sup\{c(b-a) : \Delta \in \mathcal{D}\}$$

$$= \sup\{c(b-a)\} = c(b-a) = \underline{\int_a^b} c \, dx$$

Esempio $\quad D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\underbrace{S(\Delta)}_{b-a} : \Delta \in \mathcal{D}\}$$

$$= \inf\{b-a\} = b-a$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underbrace{s(\Delta)}_{0} : \Delta \in \mathcal{D}\} =$$

$$= \sup\{0\} = 0$$

Def Una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile secondo Darboux se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Questo valore comune lo chiamiamo integrale per Darboux di f in $[a,b]$ e lo denotiamo con $\int_a^b f(x)\,dx$.

Esempio $\quad f = c$ è integrabile $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

$D(x)$ non è integrabile in $[a,b]$.