

Gianni Bosi

Lezioni di Tecnica delle Assicurazioni contro i
Danni

CAPITOLO 1

Riserve Tecniche

1.1 Introduzione

La *riserva tecnica* (o *riserva sinistri*) di una compagnia assicurativa è l'ammontare che è usato per far fronte agli impegni della compagnia in materia di indennizzi. Bisogna osservare che gli obblighi in materia di indennizzi che sorgono in un particolare anno spesso non possono essere onorati in quell'anno. Ciò accade molto spesso, specialmente nel caso di indennizzi di rilevante entità. In generale, sono molte le ragioni per le quali il pagamento dei sinistri viene ritardato. D'altra parte, in molti casi i sinistri accaduti non sono sufficientemente conosciuti, nel senso che l'assicuratore non conosce l'ammontare esatto che deve essere corrisposto. Ci riferiamo altresì ai sinistri IBNR (*Incur- red But Not Reported*) come a sinistri accaduti ma non ancora considerati. Inoltre, i sinistri RBNS claims (*Reported But Not Settled*) sono sinistri noti ma non ancora (completamente) pagati.

Quindi, deve avere luogo l'accantonamento di una riserva per i fini suesposti.

La situazione è rappresentata nella tabella 1.1 (*triangolo di run-off*), dove $C_{i,j}$ rappresenta il pagamento cumulato per i sinistri di *generazione* i con *anno di sviluppo* (*differimento* j ($0 \leq i, j \leq t$), cioè dopo j anni dall'accadimento. Quindi, si assume implicitamente che il pagamento totale per sinistri di generazione 0 sia noto dopo t anni, con t un intero positivo fissato a priori.

Tabella 1.1 Differimento

Anno di origine	0	1	2	...	t
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	...	$C_{0,t}$
1	C_{10}	C_{11}	...	$C_{1,t-1}$	
2	C_{20}				
...	...				
t	C_{t0}				

1.2 Il metodo Chain ladder

Senza dubbio, il metodo di calcolo delle riserve più largamente usato è il cosiddetto metodo *chain ladder* o della *catena*. Anche se ci sono molte varianti, lo scopo principale è quello di estrarre dal triangolo superiore della tabella di run-off una struttura per i pagamenti cumulati che possa essere usata al fine di estrapolare i dati non ancora osservati. Il metodo si basa sull'assunzione che le proporzioni di "sviluppo" rimangano le stesse (o almeno siano simili) nel futuro. Se vale questa ipotesi, il comportamento dei pagamenti futuri può essere descritto mediante certi fattori di sviluppo, o, equivalentemente, mediante determinati fattori di proporzionalità. Più precisamente, nel metodo chain ladder si assume che lo sviluppo tra periodi successivi (indipendentemente dalla generazione) può essere descritto come

$$C_{i,j+1} \approx f_j C_{i,j}, \quad (1.2.1)$$

dove f_j è il fattore di sviluppo tra i periodi di sviluppo j e $j+1$.

La stima dei fattori di sviluppo si effettua utilizzando tutta l'informazione disponibile tra successivi periodi di sviluppo, cioè

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j}}, \quad j = 0, \dots, t-1. \quad (1.2.2)$$

Supponendo l'uguaglianza nella relazione (1.2.1), il *costo ultimo* $C_{i,t}$ per la generazione i ($i \in \{0, 1, \dots, t\}$), è stimato mediante la

$$\hat{C}_{i,t} = C_{i,t-i} \prod_{j=t-i}^{t-1} \hat{f}_j, \quad (1.2.3)$$

e la *riserva suinistri* per la generazione i sarà rappresentata dalla stima dei *conti in sospeso* per la generazione i (*outstanding loss liabilities*)

$$\hat{R}_{i,t} = \hat{C}_{i,t} - C_{i,t-i}, \quad (1.2.4)$$

da cui riesce, per la *riserva totale* $\hat{R}_t$,

$$\hat{R}_t = \sum_{i=0}^t \hat{R}_{i,t} = \sum_{i=0}^t C_{i,t-i} \left(\prod_{j=t-i}^{t-1} \hat{f}_j - 1 \right). \quad (1.2.5)$$

Osserviamo, in generale, che molti metodi attuariali tradizionali e largamente usati nella pratica per completare un triangolo di run-off possono essere descritti attraverso un cosiddetto *modello lineare generalizzato* (GLM). Siano $C_{i,j}$ le variabili aleatorie corrispondenti ai pagamenti cumulati di generazione i ed anno di sviluppo (differimento) j , come in precedenza. Se consideriamo il seguente modello moltiplicativo per $C_{i,j}$:

$$C_{i,j} \approx \alpha_i \beta_j \gamma_k,$$

dove i parametri α_i , β_j , γ_k che descrivono rispettivamente l'effetto dell'anno di origine i , dell'anno di sviluppo j , e dell'anno di calendario $k = i + j$, allora il valore atteso di $C_{i,j}$ può essere espresso come

$$\mathbb{E}[C_{i,j}] = \exp\{\log \alpha_i + \log \beta_j + \log \gamma_i\}$$

o, equivalentemente,

$$\log \mathbb{E}[C_{i,j}] = \log \alpha_i + \log \beta_j + \log \gamma_i.$$

Quindi, effettivamente viene in considerazione un modello lineare generalizzato con una *funzione di collegamento logaritmica*.

1.3 Il modello stocastico di Mack

Il *modello di Mack* per la chain ladder viene descritto attraverso le tre ipotesi seguenti:

- M1** Esistano fattori di proporzionalità $f_j > 0$ tali che, per ogni scelta di $i \in \{0, \dots, t\}$ e $j \in \{0, \dots, t-1\}$, il valore atteso condizionato per i pagamenti cumulati relativi al differimento $j+1$ possono essere calcolati moltiplicando i pagamenti cumulati con differimento j per il fattore di proporzionalità f_j :

$$\mathbb{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] = f_j C_{i,j};$$

- M2** Per diversi anni di origine i and k , le variabili aleatorie multiple $\{C_{i,0}, \dots, C_{i,t}\}$ e $\{C_{k,0}, \dots, C_{k,t}\}$ siano indipendenti;

M3 Esistano costanti $\sigma_j^2 > 0$ tali che, per ogni scelta di $i \in \{0, \dots, t\}$ e $j \in \{0, \dots, t-1\}$, valgano le seguenti uguaglianze:

$$\text{Var}(C_{i,j+1} \mid C_{i,0}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

Remark 1.3.1. L'ipotesi **M1** stabilisce l'esistenza di fattori di proporzionalità e delinea la vera essenza del metodo chain ladder. L'ipotesi di indipendenza **M2** segue dal fatto che l'algoritmo chain ladder non considera alcuna dipendenza tra anni di origine (generazioni).

Il metodo di Mack formalizza ed estende l'idea del metodo chain ladder. Mack (1993) ha dimostrato che gli stimatori dei parametri f_j ottenuti con il metodo chain ladder (vedi (1.2.1)) sono corretti e che esistono stimatori consistenti dei fattori della varianza σ_j^2 .

Una descrizione formale e completa del metodo di Mack

Introduciamo due ipotesi sul meccanismo stocastico che genera la matrice $\{C_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,t}$ dei pagamenti cumulati, in modo da fornire un impianto tale da giustificare formalmente le ipotesi **M1**, **M2** e **M3**.

Ipotesi 1[pagamenti iniziali]. I pagamenti iniziali $C_{\cdot,0} = (C_{0,0}, C_{1,0}, \dots, C_{t,0})'$ siano variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) con supporto $[\epsilon, +\infty[$ per qualche numero reale $\epsilon > 0$ (vale a dire $C_{i,0} \geq \epsilon$ per $i = 0, \dots, t$). Si ponga inoltre

$$\mu_0 = \mathbb{E}[C_{i,0}] \in [\epsilon, +\infty[\quad (i = 0, \dots, t), \quad (1.3.1)$$

$$\tau_0^2 = \text{Var}[C_{i,0}] \in]0, +\infty[\quad (i = 0, \dots, t). \quad (1.3.2)$$

Ipotesi 2[distribuzione condizionata dei pagamenti individuali]. Siano $F_{i,j}$ i fattori di sviluppo individuali (vale a dire risulti, per ogni scelta degli indici $i, j \in \{0, 1, \dots, t\}$, $C_{i,j+1} = F_{i,j} C_{i,j}$). Risulti allora che la variabili aleatorie $F_{i,j}$ abbiano supporto $[1, +\infty[$, e che $F_{i,j}$ e $F_{k,l}$ siano indipendenti condizionatamente a $(C_{i,j}, C_{k,l})$ per ogni $(i, j) \neq (k, l)$, con valor medio condizionato e varianza condizionata .

$$\mathbb{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,j}] = f_j C_{i,j}. \quad (1.3.3)$$

$$\text{Var}[C_{i,j+1} \mid C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j} \quad (1.3.4)$$

Remark 1.3.2. Osserviamo che le ipotesi 1 e 2 implicano le ipotesi originarie **M1**, **M2** e **M3** di Mack.

Mack ha dimostrato che, nelle ipotesi precedenti, lo stimatore $\hat{f}_j$ definito in (1.2.2) è uno stimatore corretto dei parametri f_j , vale a dire risulta $\mathbb{E}[\hat{f}_j] = f_j$ per $j = 0, \dots, t-1$. Inoltre gli stimatori $\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{t-1}$ sono a due a due incorrelati.

Per i parametri $\sigma_0^2, \dots, \sigma_{t-2}^2$ Mack propone gli stimatori

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{t-j-1} \sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2, \quad (1.3.5)$$

che risultano essere corretti.

Notiamo che l'espressione (1.3.5) non copre la stima del parametro σ_{t-1}^2 . Si pone ragionevolmente $\hat{\sigma}_{t-1}^2 = 0$, dal momento che lo stima $\hat{f}_{t-1}$ si basa sulla sola coppia di osservazioni $(C_{0,t-1}, C_{0,t})$, vale a dire

$$\hat{f}_{t-1} = \frac{C_{0,t}}{C_{0,t-1}}$$

Così risulta se nell'espressione (1.3.5) poniamo $1/t-j$ al posto di $1/t-j-1$.

Si ponga $\mathcal{D}_t = \{C_{i,j} : i, j = 0, 1, \dots, t, i+j \leq t\}$. Si può considerare, con riguardo alla riserva totale R_t la cui stima è fornita in (1.2.5), il cosiddetto *mean square error prediction* MSEP dato da

$$MSEP(\hat{R}_t | \mathcal{D}_t) = \mathbb{E} \left[(R_t - \hat{R}_t)^2 | \mathcal{D}_t \right] \quad (1.3.6)$$

Sulla base delle ipotesi 1 e 2 sopra descritte è possibile determinare i valori medi, le varianze e le covarianze non condizionate per i pagamenti cumulati $C_{i,j}$. Le espressioni formali sono contenute nella seguente proposizione.

Proposition 1.3.3 (valori medi, varianze e covarianze di $C_{i,j}$). *Se valgono **Ipotesi 1** ed **Ipotesi 2** come sopra, allora per ogni $i, i_1, i_2, j, j_1, j_2 = 0, \dots, t$ risulta*

$$\mathbb{E}[C_{i,j}] = \mu_0 \prod_{k=0}^{j-1} f_k := \mu_j; \quad (1.3.7)$$

$$\text{Var}(C_{i,j}) = \tau_0^2 \prod_{k=0}^{j-1} f_k^2 + \mu_0 \sum_{l=0}^{j-1} \left(\prod_{m=0}^{l-1} f_m \right) \sigma_l^2 \left(\prod_{n=l+1}^{j-1} f_n^2 \right) := \tau_j^2 \quad (1.3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(C_{i,j_1}, C_{i,j_2}) &= \left(\prod_{k=j_1}^{j_2-1} f_k \right) \tau_{j_1}^2 \quad \text{con } j_1 < j_2, \\ \text{Cov}(C_{i_1,j_1}, C_{i_2,j_2}) &= 0 \quad \text{se } i_1 \neq i_2. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Normalità asintotica per il modello di Mack: stima dei parametri

Sulla base di **Ipotesi 1** e **Ipotesi 2** si possono fare importanti considerazioni sulla distribuzione asintotica degli stimatori $\hat{f}_j$ al divergere del numero di anni di sviluppo t . Vale infatti il seguente teorema.

Theorem 1.3.4 (Normalità asintotica di $\hat{f}_j$). *Siano soddisfatte **Ipotesi 1** e **Ipotesi 2**. Allora, se $t \rightarrow \infty$, vale la seguente affermazione:*

Per ogni fissato intero $j \in \{0, 1, \dots\}$, riesce

$$\sqrt{t-j}(\hat{f}_j - f_j) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_j^2}{\mu_j}\right);$$

Theorem 1.3.5 (Normalità asintotica di $\hat{\sigma}_j^2$). *Siano soddisfatte Ipotesi 1 e Ipotesi 2 ed esista finito*

$$\kappa_j^{(4)} := \mathbb{E} \left[C_{i,j}^2 \mathbb{E} \left[(F_{i,j} - f_j)^4 \mid C_{i,j} \right] \right] .$$

. Allora, se $t \rightarrow \infty$, vale la seguente affermazione:

Per ogni fissato intero $j \in \{0, 1, \dots\}$, riesce

$$\sqrt{t-j}(\hat{\sigma}_j^2 - \sigma_j^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Psi_j) ,$$

dove $\Psi_j = \kappa_j^{(4)} - \sigma_j^4$.

Bibliografia

- [1] L. Daboni, Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni, Edizioni Lint, Trieste, 1989.
- [2] P. Embrechts, C. Klüpperberg, T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, 1997.
- [3] M. Käärik, Non-Life Insurance Mathematics, E-kursuse, 2013.
- [4] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene and M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2008.
- [5] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics, Universitext, Springer, 2009.