

Derivabilità e Derivate di Funzioni

Fabio Vlacchi
MIGe Università di Trieste

Definizione di Derivata

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *derivabile* in un punto (di accumulazione) $x_0 \in A$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{rapporto incrementale di } f \text{ in } x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste ed è finito.

Definizione di Derivata

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *derivabile* in un punto (di accumulazione) $x_0 \in A$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{rapporto incrementale di } f \text{ in } x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste ed è finito.

In tal caso, si pone

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

che si dice *derivata di f* in x_0 .

Definizione di Derivata

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *derivabile* in un punto (di accumulazione) $x_0 \in A$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{rapporto incrementale di } f \text{ in } x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste ed è finito.

In tal caso, si pone

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

che si dice *derivata di f* in x_0 .

Se f risulta derivabile in ogni punto di un insieme A allora f si dice derivabile in A e la funzione

$$x \in A \mapsto f'(x)$$

si dice *derivata di f* .

- La derivata di f in x_0 è legata alla **pendenza della retta tangente** al grafico di f in x_0 .
- Formalmente:
 $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$;

- La derivata di f in x_0 è legata alla **pendenza della retta tangente** al grafico di f in x_0 .
- Formalmente:
 $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$; pertanto l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico di f per il punto $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f \text{ derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

Ma non vale il viceversa!

Una funzione può essere continua ma non derivabile.

Esempio: $f(x) = |x|$ non è derivabile in 0.

Regole di Derivazione

Siano f e g due funzioni derivabili in x_0 .

- Somma:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- Prodotto (Regola di Leibniz):

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- Quoziente ($g(x_0) \neq 0$):

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

- Composizione (chain rule) (f derivabile in $g(x_0)$):

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

- Inversa posto $y_0 = f(x_0)$, se f è invertibile

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\frac{dk}{dx} = 0 \quad \text{se } f(x) = k \text{ (costante)}$$

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$$

Derivate Fondamentali

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2(x) \qquad \frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Calcolare la derivata di:

$$f(x) = x^2 \sin x$$

Usando la regola di Leibniz e le derivate delle funzioni elementari, si ha

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Teorema di Fermat

Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 di massimo o di minimo relativo per f . Allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Fermat

Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 di massimo o di minimo relativo per f . Allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Rolle

Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e tale che $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Fermat

Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 di massimo o di minimo relativo per f . Allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Rolle

Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e tale che $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Lagrange o del Valor Medio

Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.