

Limiti di Funzioni e Continuità

Fabio Vlacchi

MIGe - Università di Trieste

19 novembre 2025

Definizione di Limite

Definizione formale per intorni: Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A . Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se, comunque preso un intorno I_L di L esiste in corrispondenza un intorno I_{x_0} di x_0 tale che se $x \in I_{x_0} \cap A$ allora $f(x) \in I_L$.

Limiti Destri e Sinistri (Laterali)

Se x_0 è finito e se si considera un intorno destro (sinistro) di x_0 , i.e. $I_{x_0}^+(r) = \{x : x_0 \leq x \leq x_0 + r\}$ ($I_{x_0}^-(r) = \{x : x_0 - r \leq x \leq x_0\}$) si definisce

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (\text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x))$$

quando nella definizione di limite si considera un intorno destro (sinistro) di x_0 .

Limiti Destri e Sinistri (Laterali)

Se x_0 è finito e se si considera un intorno destro (sinistro) di x_0 , i.e. $I_{x_0}^+(r) = \{x : x_0 \leq x \leq x_0 + r\}$ ($I_{x_0}^-(r) = \{x : x_0 - r \leq x \leq x_0\}$) si definisce

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (\text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x))$$

quando nella definizione di limite si considera un intorno destro (sinistro) di x_0 .

Qualora esistano

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2$$

si dice che L_1 è limite destro di f in x_0 (e L_2 è limite sinistro di f in x_0).

Limiti Destri e Sinistri (Laterali)

Se x_0 è finito e se si considera un intorno destro (sinistro) di x_0 , i.e. $I_{x_0}^+(r) = \{x : x_0 \leq x \leq x_0 + r\}$ ($I_{x_0}^-(r) = \{x : x_0 - r \leq x \leq x_0\}$) si definisce

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (\text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x))$$

quando nella definizione di limite si considera un intorno destro (sinistro) di x_0 .

Qualora esistano

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2$$

si dice che L_1 è limite destro di f in x_0 (e L_2 è limite sinistro di f in x_0).
Chiaramente se $L_1 = L_2 = L$, allora esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Proprietà dei Limiti

- Unicità del limite

Proprietà dei Limiti

- Unicità del limite
- Teorema del Confronto

Proprietà dei Limiti

- Unicità del limite
- Teorema del Confronto
- Teorema della Permanenza del Segno

Proprietà dei Limiti

- Unicità del limite
- Teorema del Confronto
- Teorema della Permanenza del Segno
- Compatibilità di Operazioni e Limiti

Se esistono i limiti di $f(x)$ e $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, allora:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ salvo il caso in cui
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mp\infty$;

Proprietà dei Limiti

- Unicità del limite
- Teorema del Confronto
- Teorema della Permanenza del Segno
- Compatibilità di Operazioni e Limiti

Se esistono i limiti di $f(x)$ e $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, allora:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ salvo il caso in cui
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mp\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$
salvo il caso in cui
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$);

Proprietà dei Limiti

- Unicità del limite
- Teorema del Confronto
- Teorema della Permanenza del Segno
- Compatibilità di Operazioni e Limiti

Se esistono i limiti di $f(x)$ e $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, allora:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ salvo il caso in cui
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mp\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$
salvo il caso in cui
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$);
- se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$,
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

salvo il caso in cui
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$.

Forme Indeterminate

Altre forme indeterminate (oltre a quelle già segnalate)

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = ?$$

Forme Indeterminate

Altre forme indeterminate (oltre a quelle già segnalate)

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = ?$$

Forme Indeterminate

Altre forme indeterminate (oltre a quelle già segnalate)

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = ?$$

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = ?$$

Forme Indeterminate

Altre forme indeterminate (oltre a quelle già segnalate)

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = ?$$

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = ?$$

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = ?$$

In tali casi, è necessario un'analisi più approfondita (ricorrendo a limiti notevoli) e non vi sono risultati generali per il calcolo.

Definizione di Continuità

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **continua in un punto** (di accumulazione) $x_0 \in A$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) (\in \mathbb{R})$$

In caso contrario, si dice che f non è continua in x_0 .

Definizione di Continuità

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **continua in un punto** (di accumulazione) $x_0 \in A$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) (\in \mathbb{R})$$

In caso contrario, si dice che f non è continua in x_0 .

Qualora f risulti continua in tutti i punti di A (e questi sono di accumulazione per A) si dice che f è continua in A .

Tipi di Discontinuità/Singularità

- **Discontinuità eliminabile in x_0 :** il limite in x_0 esiste ma è diverso da $f(x_0)$
- **Discontinuità di tipo salto in x_0 :** limiti destri e sinistri in x_0 esistono finiti ma sono diversi
- **Singularità in x_0 :** almeno un limite destro o sinistro in x_0 è infinito

Proprietà di funzioni continue

Grazie al Teorema di Compatibilità di Operazioni e Limiti, si ha che

- la somma (il prodotto) di funzioni continue in x_0 è continua in x_0 ;

Proprietà di funzioni continue

Grazie al Teorema di Compatibilità di Operazioni e Limiti, si ha che

- la somma (il prodotto) di funzioni continue in x_0 è continua in x_0 ;
- se f, g sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora anche f/g è continua in x_0 :

Proprietà di funzioni continue

Grazie al Teorema di Compatibilità di Operazioni e Limiti, si ha che

- la somma (il prodotto) di funzioni continue in x_0 è continua in x_0 ;
- se f, g sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora anche f/g è continua in x_0 ;
- la composta di funzioni continue è continua;

Proprietà di funzioni continue

Grazie al Teorema di Compatibilità di Operazioni e Limiti, si ha che

- la somma (il prodotto) di funzioni continue in x_0 è continua in x_0 ;
- se f, g sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora anche f/g è continua in x_0 ;
- la composta di funzioni continue è continua;
- l'inversa di funzioni continue è continua.

Teorema di Weierstrass

Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è limitata e assume massimo e minimo.

Teoremi sulla Continuità

Teorema di Weierstrass

Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è limitata e assume massimo e minimo.

Teorema di Esistenza degli Zeri

Se f è continua su $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Teoremi sulla Continuità

Teorema di Weierstrass

Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è limitata e assume massimo e minimo.

Teorema di Esistenza degli Zeri

Se f è continua su $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Teorema dei Valori Intermedi

Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il valore massimo e il valore minimo.