<u>Geometria affine</u>

La geometria affine parla di <u>punti</u> e usa gli spazi vettoriali come spazi delle direzioni. Studieremo i modi per descrivere (tramite le cosid-dette <u>equazioni parametriche</u> e <u>equazioni cartesiane</u>) degli oggetti che chiameremo <u>sottospazi affini</u> (rette, piani, ...)

<u>Def</u>: sia V uno spazio vettoriale su K; un insieme A si dice uno <u>spazio affine</u> su V se esiste una funzione

$$\sigma: A \times A \longrightarrow V$$

(e denotiamo, per ogni $P, Q \in A$, $\sigma(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$)

che soddisfa le seguenti proprietà:

SA1. $\forall P \in A$ e $\forall v \in V$ esiste un unico $Q \in A$ tale che

$$v = \overrightarrow{PQ}$$

SA2. $\forall P, Q, R \in A$ (non necessariamente distinti) vale che

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

gli elementi di A si dicono <u>punti</u>.

Questa definizione formalizza le proprietà che abbiamo visto all'inizio del corso riguardanti i vettori liberi e applicati. Infatti, abbiamo visto che i vettori liberi formano uno spazio vettoriale e che per ogni punto P e per ogni vettore libero v esiste un unico vettore applicato con punto iniziale P e classe di equipollenza v, ovvero

il punto Q è l'unico punto tale che $[PQ] = v$

Inoltre abbiamo visto che vale la proprietà riguardante la somma per vettori liberi e applicati.

<u>Esempio</u>: prendiamo $A = K^n$ (ad esempio $A = \mathbb{R}^n$) e scegliamo $V = K^n$ (qui K^n gioca due ruoli, che non vanno confusi: quello di insieme, per A, e quello di spazio vettoriale, per V); per chiarire meglio, quando pensiamo a K^n come spazio affine, denotiamo i suoi elementi come matrici riga $1 \times n$, mentre quando pensiamo a K^n come spazio vettoriale denotiamo i suoi elementi come matrici colonna $n \times 1$; la funzione σ che rende K^n uno spazio affine è

$$\begin{array}{ccccc} & A \times A & & V \\ \sigma: & K^n \times K^n & \longrightarrow & K^n \\ & (P, Q) & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} \\ & (p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} \end{array}$$

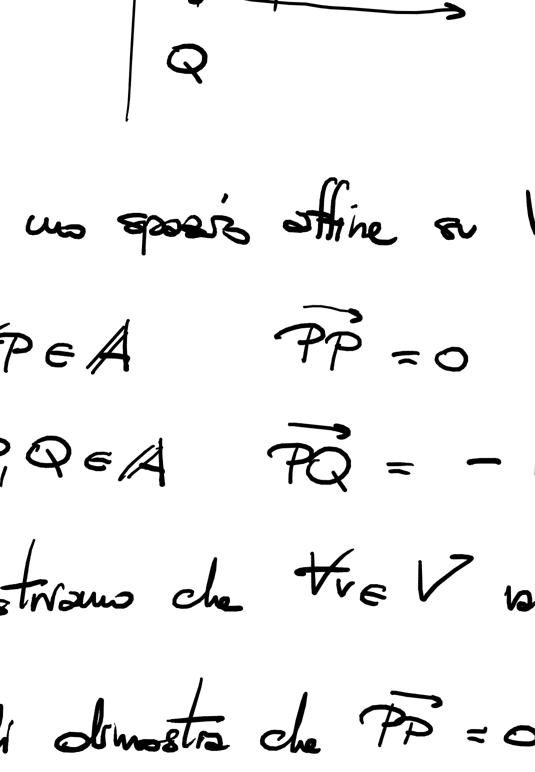
si verifica che tale funzione soddisfa SA1 ed SA2.

quando pensiamo a K^n come spazio affine, lo denotiamo A^n_K;

se ad esempio $n = 2$ e prendiamo:

$$P = (2, 3) \quad \text{e} \quad Q = (1, 0)$$

allora $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$



<u>Lemma</u>: sia A uno spazio affine su V, allora vale

1. $\forall P \in A \quad \overrightarrow{PP} = 0$ (vettore nullo in V)
2. $\forall P, Q \in A \quad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Dim: 1. dimostriamo che $\forall v \in V$ vale che $v + \overrightarrow{PP} = v$ (questo quindi dimostra che $\overrightarrow{PP} = 0$); per SA1, esiste un unico $Q \in A$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$, allora

$$v + \overrightarrow{PP} \underset{\text{commutatività}}{=} \overrightarrow{PP} + v = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{PQ} = v$$

2. mostriamo che $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = 0$ (vettore nullo in V)

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{PP} \overset{\text{punto } 1}{=} 0$$

<u>Def</u>: sia A uno spazio affine su V, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita; definiamo la <u>dimensione</u> di A come la dimensione di V, ovvero $\dim A := \dim V$.

- se $\dim A = 0$, allora A è un <u>punto affine</u>
- se $\dim A = 1$, allora A è una <u>retta affine</u>
- se $\dim A = 2$, allora A è un <u>piano affine</u>
- se $\dim A = 3$, allora A è uno <u>spazio affine</u>

<u>Def</u>: sia A uno spazio affine su V con V di dimensione finita; un <u>riferimento affine</u> su A è una coppia $(O, \mathcal{B})$ dove $O \in A$ e $\mathcal{B}$ è una base di V; il punto O si dice <u>origine</u> del riferimento affine; dato un riferimento affine $(O, \mathcal{B})$ su A e dato un punto $P \in A$, le <u>coordinate</u> di P rispetto al riferimento $(O, \mathcal{B})$ sono la n-upla $(p_1, \dots, p_n)$ (dove $n = \dim V$) data dalle coordinate di $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.