Soluzione esercizio 1 foglio 8:

r, s sono sghembe $\Rightarrow \exists$ un vettore u di minima distanza fra r, s

e dati v_1 vettore direzione di r e v_2 vettore direzione di s, u

risulta essere ortogonale sia a v_1 che a v_2 $\Rightarrow$ $\{v_1, v_2, u\}$ sono

linearmente indipendenti $\Rightarrow$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Costruisco una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ adattata alle rette:

$$\bar{e}_1 = v_1, \qquad \bar{e}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1, \qquad \bar{e}_3 = u$$

$\Rightarrow$ r ha direzione $\bar{e}_1$, s direzione combinazione lin. di $\bar{e}_1, \bar{e}_2$,

distanza fra r ed s è lungo $\bar{e}_3$.

Definisco un'applicazione affine $F(x) = A(x-p)$ dove $p \in r$

punto di applicazione del vettore di minima distanza e

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ applicazione t.c. manda

$$\bar{e}_1 \longmapsto (1,0,0)$$
$$\bar{e}_2 \longmapsto (0,1,0)$$
$$\bar{e}_3 \longmapsto (0,0,1)$$

A è invertibile perché è una matrice di cambio di base $\Rightarrow$ F

omeomorfismo.

<u>immagine di r:</u> un punto di r è della forma

$$p + t\bar{e}_1 \quad \Rightarrow \quad F(p+t\bar{e}_1) = A(p+t\bar{e}_1 - p) = A(t\bar{e}_1) = t(1,0,0)$$

$\Rightarrow F(r) =$ asse x

<u>immagine di s:</u> un punto di s è della forma $q + \gamma(\alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2)$

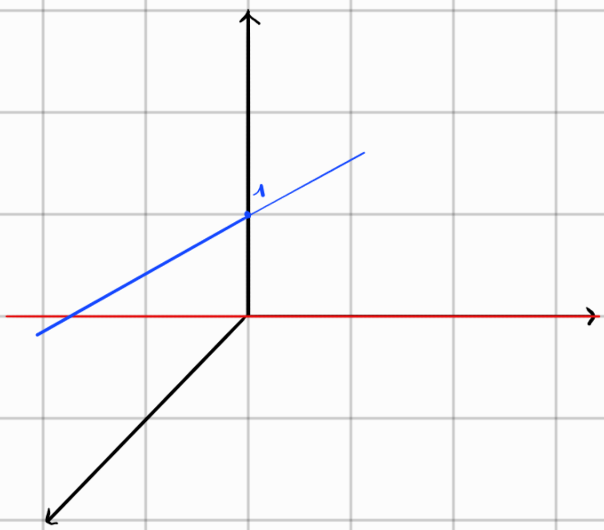
con q estremo vettore di minima distanza in s $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(q + J(\alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2)) = A(\underbrace{q-p}_{=\bar{e}_3} + J\alpha\bar{e}_1 + J\beta\bar{e}_2) =$$

$$= (0,0,1) + J\alpha(1,0,0) + J\beta(0,1,0)$$

$$\Rightarrow F(s) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + J\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ho dunque ora portato le due rette r, s ad essere una l'asse x e l'altra una retta contenuta in un piano $\parallel$ al piano xy a quota 1:



considero ora la seguente funzione:

$$\vartheta(z) = \begin{cases} 0 & , \ z < 0 \\ \frac{\pi}{2} z & , \ z \in [0,1] \\ \frac{\pi}{2} & , \ z > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vartheta(z)$ è un omeomorfismo (verificare)

voglio che i punti che si trovano a quota $t=0$ rimangano fissi $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ r rimane fissa

i punti a quota $z = 1 \Rightarrow$ ruotiamo di $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ applico la seguente rotazione di asse z:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta(z) & \sin \vartheta(z) & 0 \\ -\sin \vartheta(z) & \cos \vartheta(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (verifica omeomorfismo)

$\Rightarrow$ la retta s viene ruotata di $\frac{\pi}{2}$ fino ad essere parallela alla retta r (che ora è l'asse x).