

Esercizio 15. Risoluzione di equazioni nella forma $f(x)=x$ in un intervallo $[a, b]$

Consideriamo $g(x) = f(x) - x$

se $g(x)$ è continua in $[a, b]$ e

$$g(a) \cdot g(b) \leq 0$$

allora esiste in $[a, b]$ almeno uno zero di $g(x)$, quindi almeno una soluzione dell'equazione $f(x)=x$.

Risolviamo in modo iterativo

$x = x_0$ inizializziamo il ciclo iterativo

$x_1 = f(x_0)$ iterazione 1

$x_2 = f(x_1)$ iterazione 2

.....

$x_k = f(x_{k-1})$ iterazione k-esima

Se la successione è convergente, dopo un certo numero k di iterazioni, x_k approssima x_0 a meno di un errore predefinito.

Se $(f(x_{k+1}) - f(x_k)) < (f(x_k) - f(x_{k-1})) \quad \forall k$ allora la successione converge e

$$x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$$

Si dimostra che se $|f'(x)| < 1$ nell'intervallo $[a, b]$ la successione $f(x_k)$ converge

Esempio

Trovare se esistono le soluzioni dell'equazione $x = (e^x - 1)^{-\frac{1}{2}}$ nell'intervallo $[0.5, 2]$

Verifichiamo se ci sono soluzioni in $[0.5, 2]$

Consideriamo

$$g(x) = f(x) - x = (e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} - x$$

$$g(0.5) \cdot g(2) = -1.19 < 0$$

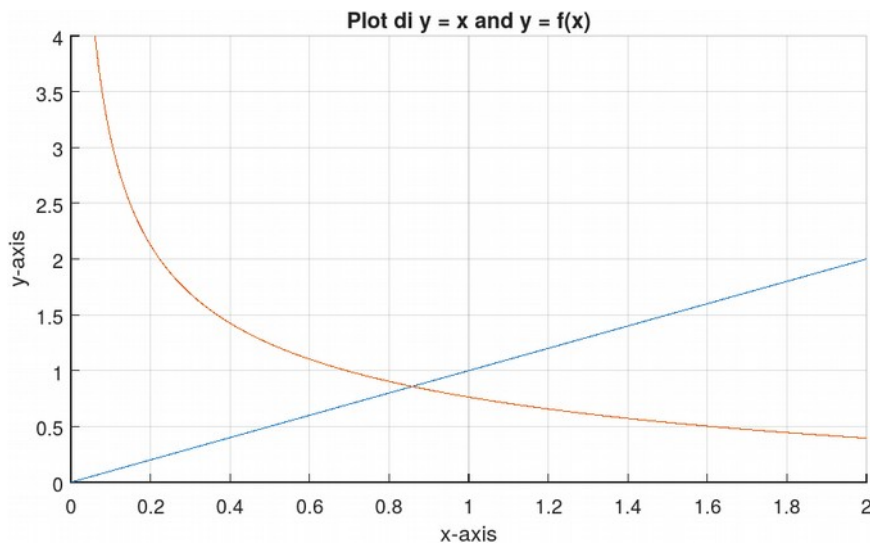
Quindi esiste almeno una soluzione in $[0.5, 2]$

Per comprender meglio la situazione, possiamo considerare il sistema

$$y = x$$

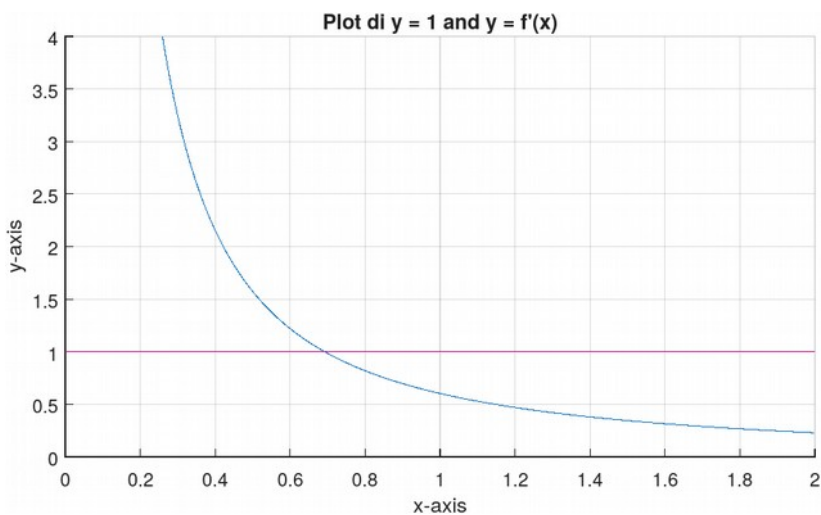
$$y = (e^x - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

La soluzione del sistema è anche la soluzione dell'equazione data



Dal grafico si vede che la soluzione del sistema, intersezione delle due curve, è compresa tra 0.8 e 1.

Riportiamo anche il grafico della $f'(x)$, dal quale si vede che $|f'(x)| < 1$ nell'intervallo $[0.8 \ 1]$



f_xUgualX.m

Soluzione di $f(x)=x$ nell'intervallo $[0 \ 2]$ è: 8.579917e-01

Soluzione trovata dopo 104 iterazioni

errore 2.065015e-14

Esercizio 16. Calcolo delle correnti di polarizzazione di un BJT

Esempio di applicazione di risoluzione di equazioni $x=f(x)$

La corrente di collettore I_c di un transistor a giunzione bipolare (BJT) è data da

$$I_c = I_s \left(e^{\frac{V_{be}}{V_t}} - 1 \right) \approx I_s e^{\frac{V_{be}}{V_t}} \quad \text{tipicamente in regione attiva } I_c \gg I_s \quad (1)$$

dove I_s è la corrente di saturazione, caratteristica di fabbrica del BJT, V_{be} è la tensione tra base e collettore e V_t è la “tensione equivalente della temperatura”, V_{be} è la tensione base-emettitore.

$$V_t = \frac{kT}{q}$$

k è la costante di Boltzmann, T è la temperatura assoluta in Kelvin e q è la carica dell'elettrone.

A temperatura ambiente ($25^\circ\text{C} = 298.15\text{K}$), la tensione termica è di circa 25 mV

k : costante di Boltzmann $= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

q : carica dell'elettrone $= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

La corrente di base è data da

$$I_b = \frac{I_c}{\beta}$$

β (guadagno di corrente) è una caratteristica del BJT

Consideriamo il circuito riportato in figura.

Possiamo scrivere

$$V_{be} = V_b - R I_b = V_b - R \frac{I_c}{\beta} \quad (2)$$

Dall'equazione (1) ricaviamo V_{be}

$$V_{be} = V_t \ln \frac{I_c}{I_s} \quad (3)$$

Quindi, unendo la (2) e la (3)

$$V_{be} = V_t \ln \frac{I_c}{I_s} = V_b - R \frac{I_c}{\beta} \quad (4)$$

Dalla (4) otteniamo l'equazione $I_c = f(I_c)$

$$I_c = \frac{\beta}{Rb} (V_b - V_t \ln \frac{I_c}{I_s})$$

Dati

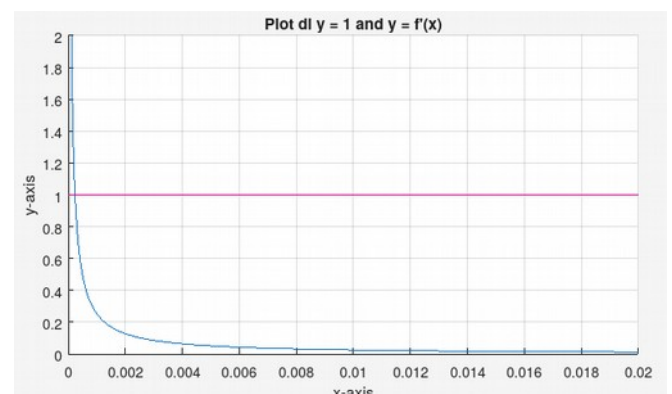
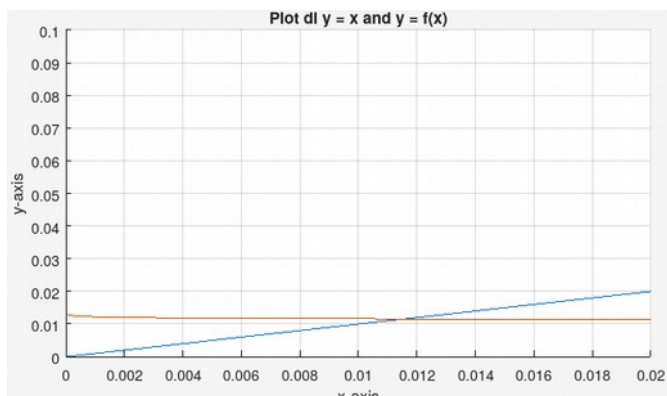
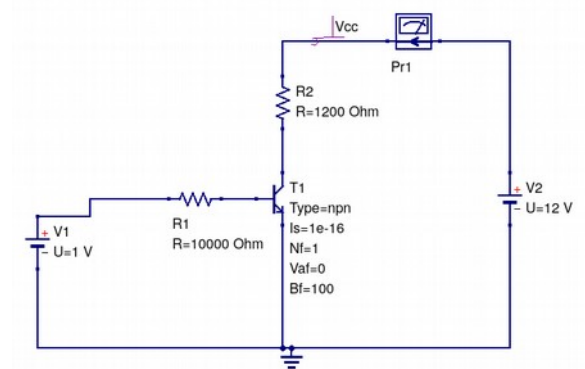
$V_b = 1 \text{ V}$

$R_b = 10000 \Omega$

$\beta = 100$

$V_t = 26 \text{ mV}$

$I_s = 10^{-16} \text{ A}$



Esercizio 17. Risoluzione di equazioni nella forma $f(x)=0$ in un intervallo $[a, b]$

Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0$$

allora esiste in $[a, b]$ almeno uno zero di $f(x)$.

Esistono numerosi metodi iterativi disponibili in letteratura, come ad esempio il metodo di Newton e il metodo delle secanti.

In Matlab possiamo sfruttare l'elaborazione booleane su vettori.

f_xUgualeZero.m

```
% calcolo degli zeri di f(x)=0 in [a b]
% se f(x) è continua in [a b] e f(a)*f(b)<0, allora esiste in [a b] almeno
% uno zero di f(x)
clear all
close all

% approccio diretto definisco f(x) in [a b]
% calcolo il segno di f(x)
a=-8;
b =8;
n=1000;
x=linspace(a,b,n);
f= @(x) log(x.^-2+1)-x;
segnoDi_f=sign(f(x));
%utilizzo diff(segno) per verificare se il segno di f cambia
variazioneDiSegno=diff(sign(f(x)))/2;
numeroDiZeri=sum(abs(variazioneDiSegno));

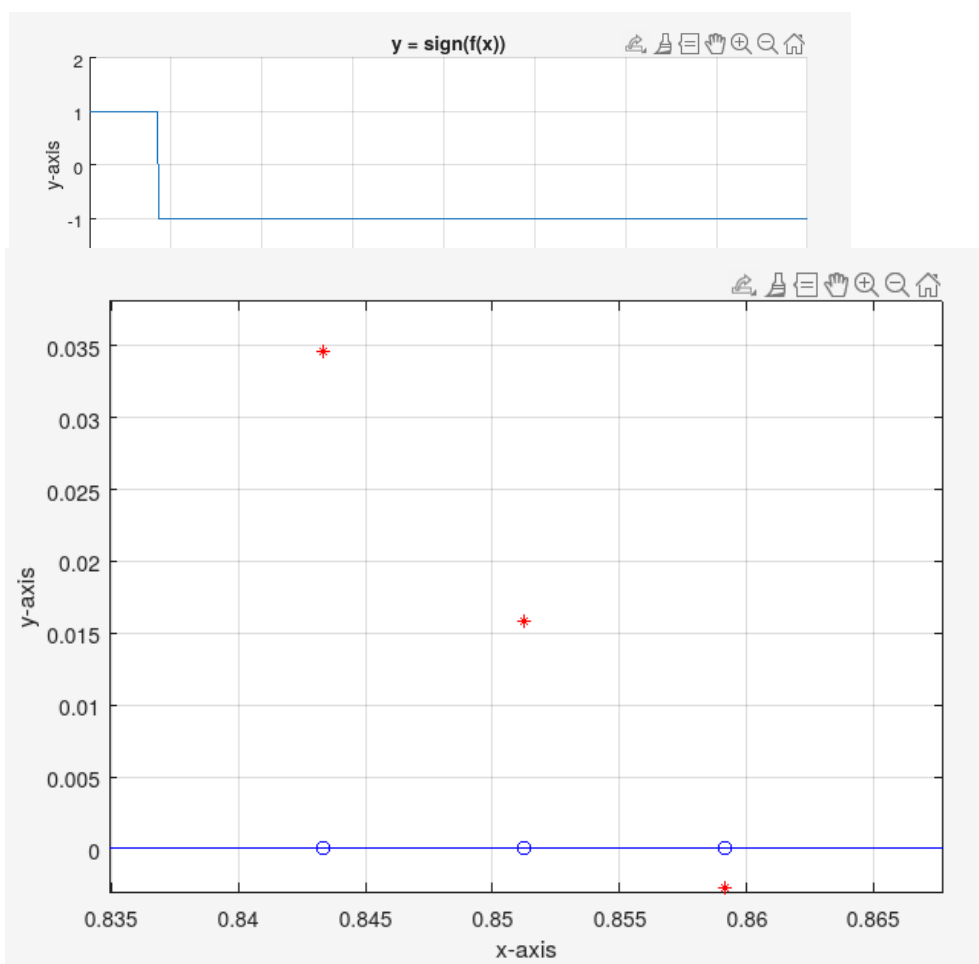
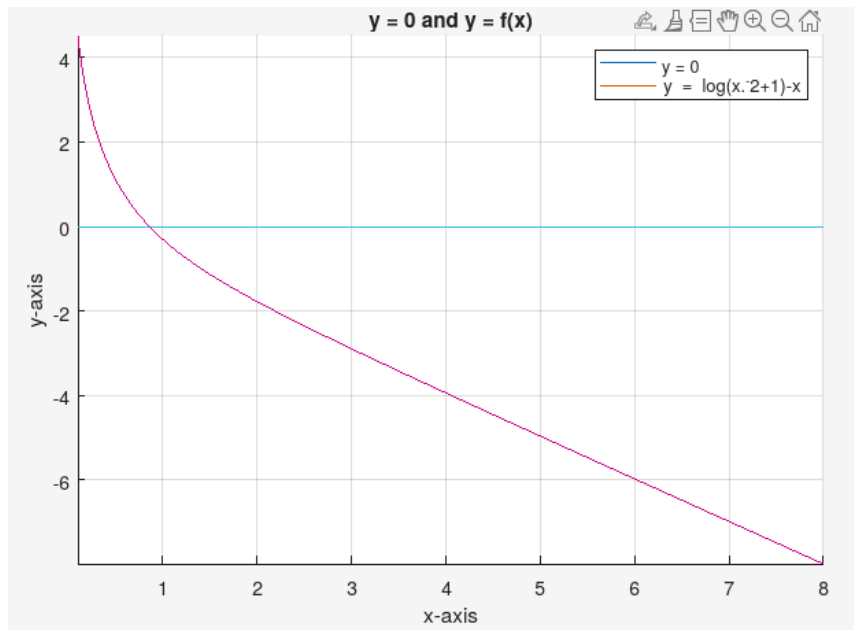
if numeroDiZeri > 0
    k=find(variazioneDiSegno~=0);
    xk=x(k);
    f(xk);
    xkmeno1=x(k-1);
    f(xkmeno1);
    xkpiu1=x(k+1);
    f(xkpiu1);
    xeps=[xkmeno1 xk xkpiu1];
    figure(3)
    title('Zero di f e dintorni');
    plot(x,zeros(n),'b',xeps,zeros(length(xeps)),'bo',xeps,f(xeps),'r*')
    axis([min(xeps)*0.99 max(xeps)*1.01 min(f(xeps))*1.1 max(f(xeps))*1.1])
    xlabel('x-axis');
    ylabel('y-axis');
    grid on
    fprintf("numero di zeri di f(x): %d\n",numeroDiZeri)
    fprintf("Zeri di f(x) nell'intervallo [%d %d]\n",a,b);
    disp(xk);
else
    fprintf("f(x) non ha zeri in [%d %d]",a,b)
end
```

Esempio

Calcolare, se esistono, gli zeri della funzione nell'intervallo $[0.1 \ 8]$.

$$f(x) = \log(x^{-2} + 1) - x$$

$f(0.1) \cdot f(8) = -36 < 0 \Rightarrow$ esiste almeno uno zero di $f(x)$ in $[0.1 \ 8]$.



numero di zeri di $f(x)$: 1

Zeri di $f(x)$ nell'intervallo $[1.000000e-01 \ 8]$

0.851251251251251

Per migliorare la precisione, si può ripetere il metodo con un nuovo intervallo $[x_{k-1} \ x_{k+1}]$

Esempio

Calcolare, se esistono, gli zeri della funzione nell'intervallo $[-8 \ 8]$.

$$f(x) = \cos(x)$$

Risultato:

numero di zeri di $f(x)$: 6

Zeri di $f(x)$ nell'intervallo $[-8 \ 8]$

-7.8558 -4.7167 -1.5775 1.5615 4.7007 7.8398

