20 Novembre

La volta scorsa abbiamo dimostrato che funzioni costanti sono integrabili per Darboux in un qualsiasi intervallo $[a,b]$.

La funzione di Dirichlet $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

non è integrabile per Darboux in nessun intervallo $[a,b]$.

Teorema (Caratterizzazione di funzioni integrabili)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, f limitata

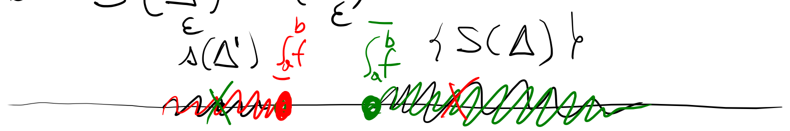
($\exists\, m<M$ in $\mathbb{R}$ t.c. $m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$).

Allora le seguenti due proposizioni sono equivalenti

1) f è integrabile per Darboux in $[a,b]$

2) $\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, \Delta_\varepsilon$, una decomposizione, tale che

$$0\le S(\Delta_\varepsilon)-s(\Delta_\varepsilon)<\varepsilon .$$



Dim $2)\Longrightarrow 1)$ Supponiamo che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ge s(\Delta) \qquad \forall\, \Delta$$

$$\begin{cases} \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(\Delta) & \forall\, \Delta \\ -\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le -s(\Delta) \end{cases}$$

$$0\le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(\Delta_\varepsilon)-s(\Delta_\varepsilon) \quad \forall\, \Delta$$

$$< \varepsilon$$

Pertanto se vale la (2) e risulta che ho dimostrato che

$$0\le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \Rightarrow (1)$$

∎

Teorema Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotona. Allora f è integrabile per Darboux in $[a,b]$.

Dim Basta considerare il caso di f crescente.

$\Delta_n \quad a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ la consideriamo in modo che $x_j-x_{j-1}=\frac{b-a}{n}$

$$S(\Delta_n)=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(x_j-x_{j-1})}_{\frac{b-a}{n}}\underbrace{\sup f([x_{j-1},x_j])}_{f(x_j)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_j)=\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_j)$$

$$s(\Delta_n)=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(x_j-x_{j-1})}_{\frac{b-a}{n}}\underbrace{\inf f([x_{j-1},x_j])}_{f(x_{j-1})}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_{j-1})$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{j-1})$$

$$S(\Delta_n)-s(\Delta_n)=\frac{b-a}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}f(x_j)-\sum_{j=1}^{n}f(x_{j-1})\right]$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[f(x_n)-f(x_0)\right]$$

$\forall n$

$$S(\Delta_n)-s(\Delta_n)=\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)\xrightarrow{n\to+\infty}0.$$

Ma allora $\forall\,\varepsilon>0 \;\exists\, n$ t.c.

$0\le S(\Delta_n)-s(\Delta_n)<\varepsilon$. Quindi f crescente soddisfa la proposizione 2 del teorema precedente

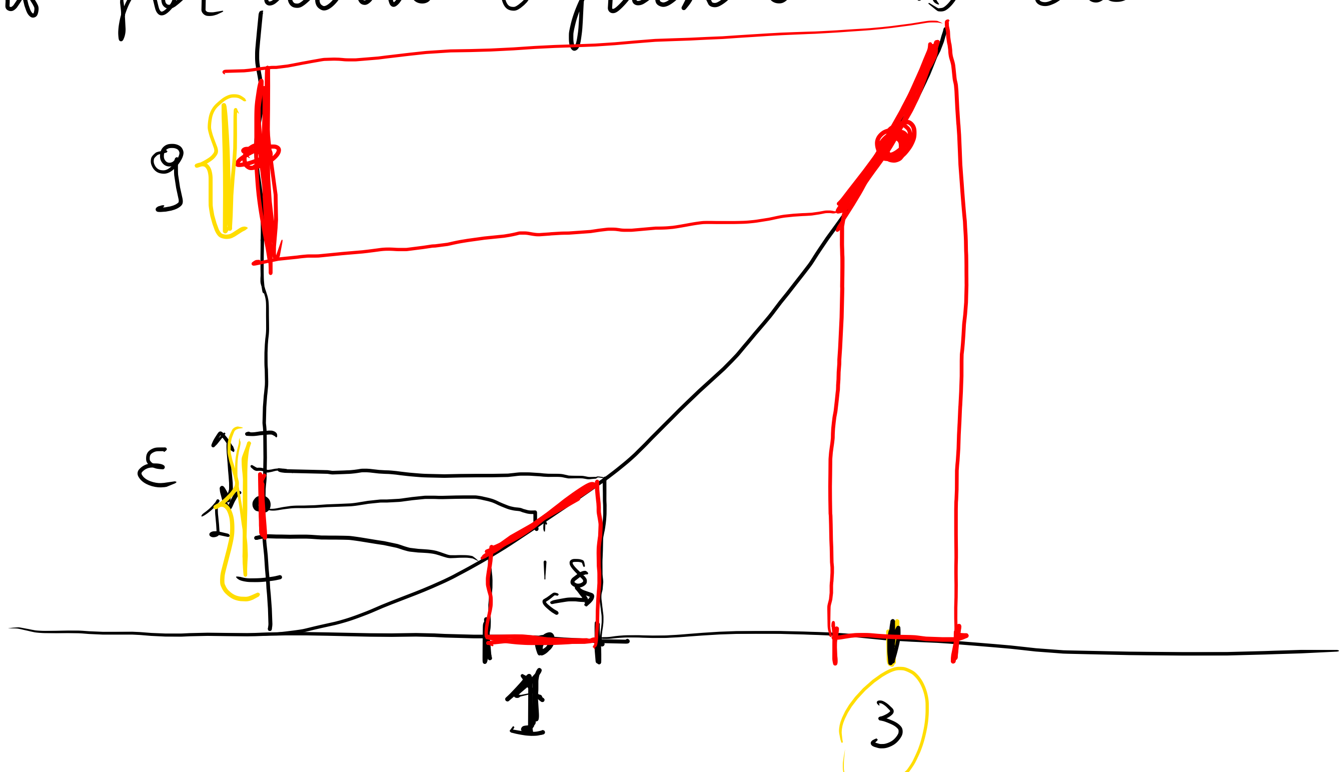
$\Rightarrow f$ è integrabile.

<u>Osservazione</u> Ricordiamoci cosa significa che $f: I \to \mathbb{R}$ è continua in I:

$\forall x_0 \in I$ e (1)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si ha l'uniforme continuità di f in I quando in (1) è possibile prendere un δ_ε che è lo stesso per tutti i punti x_0 dell'intervallo.



Teorema (Heine) Se $f \in C^0([a,b])$ allora f è uniformemente continua in $[a,b]$.

<u>Corollario</u> Se $f \in C^0([a,b])$ allora
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0$ t.c.
se $|x-y| < \delta_\varepsilon$ e $x, y \in [a,b]$, allora
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

<u>Corollario</u> $f \in C^0([a,b]) \Rightarrow f \in L[a,b]$
($L[a,b]$ è l'insieme delle funzioni integrabili)

<u>Dim</u> Prendiamo le Δ_n di prima

$\Delta_n \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \qquad x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$

$$S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

Per il teorema di Weierstrass $\exists \ x_j^M \in [x_{j-1}, x_j]$ (x_j^m)
t.c. $f(x_j^M) = \sup f([x_{j-1}, x_j])$ $\left(f(x_j^m) = \inf f([x_{j-1}, x_j]) \right)$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_j^M)$$

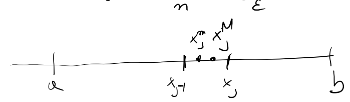
$$s(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \inf f([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_j^m)$$

$$0 \le S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \left(f(x_j^M) - f(x_j^m) \right)$$

Sia ora $\varepsilon > 0$. Sappiamo che $\exists \ \delta_\varepsilon > 0$ t.c.

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Ora prendiamo n t.c. $\frac{b-a}{n} < \delta_\varepsilon$



$$0 \le S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \left(f(x_j^M) - f(x_j^m) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \underbrace{|f(x_j^M) - f(x_j^m)|}_{<\varepsilon}$$

Per ogni j, $x_j^M, x_j^m \in [x_{j-1}, x_j] \Rightarrow$

$$|x_j^M - x_j^m| \le x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n} < \delta_\varepsilon \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$|f(x_j^M) - f(x_j^m)| < \varepsilon \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

$$< \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \varepsilon = \cancel{n} \frac{b-a}{\cancel{n}} \varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

Ho dimostrato che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n$ t.c.
$0 \le S(\Delta_n) - s(\Delta_n) < (b-a)\varepsilon$. (3)

Questo implica che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n$ t.c.
$0 \le S(\Delta_n) - s(\Delta_n) < \varepsilon$ (4)

Per dimostrare la (4) basta applicare la (3) al numero $\frac{\varepsilon}{b-a}$.

<u>Teorema</u> Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato

1) (linearità) Se $f, g \in L[a,b]$ e se λ e $\mu \in \mathbb{R}$ allora

$\lambda f + \mu g \in L[a,b]$ ed inoltre

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

2) Se $f, g \in L[a,b]$ allora la funzione prodotto fg è integrabile in $[a,b]$.

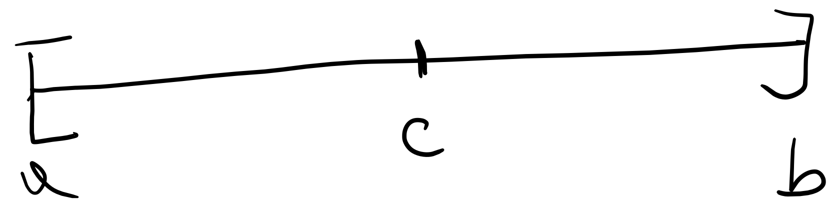
3) (monotonia) Se $f, g \in L[a,b]$ e se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

Se f e $g \in C^0([a,b])$ con $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ e se sono distinte allora

$$\int_a^b f(x)\, dx < \int_a^b g(x)\, dx$$

Teor (Chasles) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e sia

$c\in(a,b)$



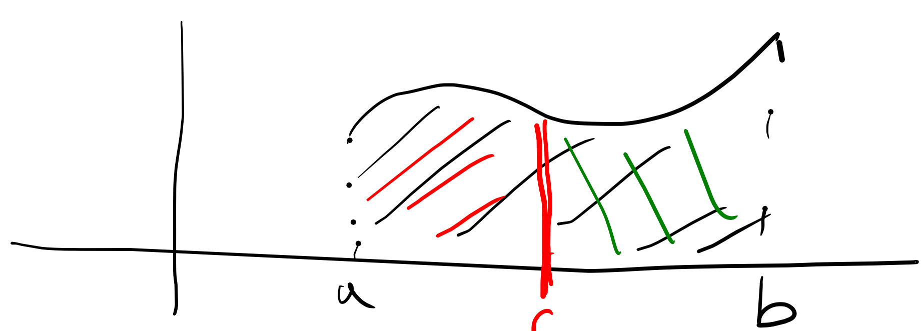
Sono equivalenti le seguenti proposizioni

1) $f\in L[a,b]$

2) $f\in L[a,c]$ e $f\in L[c,b]$.

Ed inoltre, quando 1) e 2) sono vere risulta

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$



Teor Sia $f \in L[a,b]$. Allora $|f| \in L[a,b]$ e si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (1)$$

(Disuguaglianza triangolare)

Dim Dimostriamo solo la (1). Sappiamo che

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \qquad \forall x \in [a,b]$$

Per la monotonia

$$\underbrace{\int_a^b -|f(x)|\,dx}_{\parallel} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx .$$

<u>Osservazione</u> Il teorema garantisce che $f \in L[a,b]$ $\Rightarrow |f| \in L[a,b]$.

In generale non è vero che $|f| \in L[a,b] \Rightarrow f \in L[a,b]$.

Esempio. Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Consideriamo

$$2D(x) - 1$$

se $x \in \mathbb{Q}$ $\qquad 2D(x) - 1 = 2 - 1 = 1$

se $x \notin \mathbb{Q}$ $\qquad 2D(x) - 1 = -1$

Qui abbiamo dimostrato che $f(x) = 2D(x) - 1$.

$\boxed{\text{Sia } f \notin L[a,b] \text{ per ogni intervallo } [a,b].}$ $\ast$

Se fosse $f \in L[a,b]$ per un intervallo $[a,b]$

$$f(x) = 2D(x) - 1 \Longleftrightarrow D(x) = \frac{f(x)+1}{2} \in L[a,b]$$

ma $D \in L[a,b]$ è falso.

Segue che $\ast$ è vero.

Quindi in ogni $[a,b]$ si ha $f \notin L[a,b]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$|f(x)| \equiv 1 \in L[a,b].$$