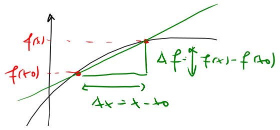
Lezione 30 - 20/11/2025

Calcolo differenziale

$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x_0 \in I$



Prime proprietà delle derivate.

R

$x \longmapsto R_{x_0}^{f}(x) = \frac{\quad}{x - x_0}$

rapporto incrementale ← coeff. angolare della secante per $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$

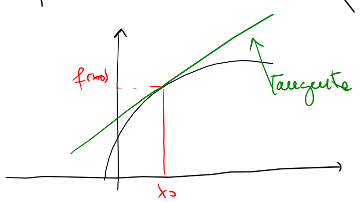
se esiste $\lim_{x \to x_0} R_{x_0}^{f}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

si dice derivata di f in x_0

lo indico con $f'(x_0)$

se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ (se esiste finito $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$)

f si dice derivabile in x_0 ↖ $f'(x_0)$ è il coeff angolare della tangente al grafico per $(x_0, f(x_0))$



Esempi di funzioni derivabili e calcolo della derivata

f	f'
c	0
x	1
x^n	$n x^{n-1}$
x^m	$m x^{m-1}$ ($m \in \mathbb{Z}$, anche negativo, $x \neq 0$)
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$ $(x > 0)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$1 + (\operatorname{tg} x)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$

$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

$$R_{x_0}^{\operatorname{tg}}(x) = \frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x_0}{\cos x_0}}{x - x_0} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x_0 - \cos x \operatorname{sen} x_0}{\cos x \cdot \cos x_0} \cdot \frac{1}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x - x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow{x \to x_0} 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x \cdot \cos x_0}}_{\to \frac{1}{(\cos x_0)^2}}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + (\operatorname{tg} x)^2$$

Prime proprietà delle derivate.

Prime proprietà delle derivate.

T. (rapporto tra derivabilità e continuità)

sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ (intervallo)

se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

dim. cosa vuol dire essere continua in x_0?

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \longleftarrow \text{"punto di arrivo del teorema"}$$

quindi considero, per f derivabile in x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0)$$

se riesco a trovare che questo limite è 0 ho finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow_{x \to x_0}\ f'(x_0) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{x - x_0}_{\downarrow_{x \to x_0}\ 0}$$

$\Rightarrow$ il limite è 0

fine.

T.2. siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ (int.), $x_0 \in I$.

supponiamo che f, g sia derivabili in x_0

Allora $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ sono derivabili (se $g(x_0) \neq 0$)

e valgono

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

regola di Leibniz $\to$
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

dim.

$$R^{f+g}_{x_0}(x) = \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \frac{f(x)+g(x) - (f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}$$
$$= \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow\ f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow\ g'(x_0)}$$

$R^{f+g}_{x_0}(x) \downarrow (f+g)'(x_0)$ uguale $f'(x_0) + g'(x_0)$

$$R^{fg}_{x_0}(x) = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$= f(x) \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\xrightarrow{x\to x_0} f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0)$$

f derivabile $\Downarrow$ f continua

$$R^{\frac{f}{g}}_{x_0}(x) = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}$$

$$= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\cdot\frac{1}{x-x_0}$$

$$= \left(\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\right)\frac{1}{g(x)g(x_0)}$$

$$= \left(g(x_0)\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) + f(x_0)\left(\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\right)\right)\cdot\frac{1}{g(x)g(x_0)}$$

$$\to \left(g(x_0)f'(x_0) \quad -f(x_0)g'(x_0)\right)\cdot\frac{1}{(g(x_0))^2}$$

CVD

Es.

$$(a\,f(x))' = a'\cdot\cancel{f(x)} + a\cdot f'(x) = a\,f'(x)$$

$$(3x^2+6x+1)' = (3x^2)' + (6x)' + (1)' = 3\cdot(2x) + 6 + 0 = 6x+6$$

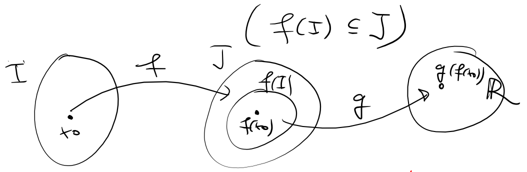
$$(\operatorname{sen} x\cdot \lg x)' = (\operatorname{sen} x)'\cdot\lg x + \operatorname{sen} x\,(\lg x)' = \cos x\cdot \lg x + \operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{x}$$

T. (derivata della funzione composta)

$f: I\to\mathbb{R}$ $\quad x_0\in I$, f derivabile in x_0

$g: J\to\mathbb{R}$ $\quad$, $f(x_0)\in J$, g derivabile in $f(x_0)$

$(f(I)\subseteq J)$



Allora $g\circ f$ è derivabile in x_0

e $\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}$ regola della catena (chain rule)

dim. idea

$$R^{g\circ f}_{x_0}(x) = \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0}$$

idea

$$R^{g\circ f}_{x_0}(x) = \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$, y; $x \to x$

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

c'è un problema! nessuno detto che $f(x) \neq f(x_0)$ quindi in generale non potrei moltiplicare e dividere

Per sistemare le cose si può fare così:

si introduce una funzione ausiliaria

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{se } y = f(x_0) \end{cases}$$

h è tale che $\lim_{y \to f(x_0)} h(y) = g'(f(x_0))$

cioè h è continua in $f(x_0)$

si verifica che $\forall x \in I$, $x \neq x_0$, vale

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si può passare al limite e vale

$$\boxed{(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

CVD

$$\boxed{(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

Esempi

calcolare $\left(e^{3x^2+6x} + \lg(\cos x)\right)'$

$$\left(e^{3x^2+6x}\right)' = e^{3x^2+6x} \cdot (6x+6)$$

$x \longrightarrow e^{3x^2+6x}$

$x \longrightarrow 3x^2+6x = y \longrightarrow e^y$

$$(\lg(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \cdot -\operatorname{sen} x = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

$x \longrightarrow \cos x = y \longmapsto \lg y$

$$\left(e^{3x^2+6x} + \lg(\cos x)\right)' = e^{3x^2+6x}(6x+6) - \operatorname{tg} x$$

- calcolare $(x^x)' = \left(e^{x \lg x}\right)' = e^{x\lg x}(x \lg x)' = e^{x \lg x}\left(\lg x + \frac{x}{x}\right) = x^x(\lg x + 1)$

calcolare le derivate di

$$\frac{x^2-1}{x(x+2)} \quad , \quad \lg(\lg(\operatorname{sen} x))$$

$$2^{x \operatorname{sen} x} \quad , \quad \sqrt{1+x^3} \quad , \quad \sqrt[3]{1-3x} + x$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x}\right)' = \frac{2x(x^2+2x)-(2x+2)(x^2-1)}{(x^2+2x)^2}$$

$$\Big(\lg(\lg(\operatorname{sen} x))\Big)' = \frac{1}{\lg(\operatorname{sen} x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = \frac{1}{\lg(\operatorname{sen} x)} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\left(2^{x \operatorname{sen} x}\right) = \left(e^{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \lg 2}\right)' = e^{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \lg 2} \cdot (x \operatorname{sen} x \cdot \lg 2)'$$

$$= e^{x \operatorname{sen} x \lg 2}\left(\lg 2 \, (\operatorname{sen} x + x \cos x)\right)$$

$$= 2^{x \operatorname{sen} x} (\lg 2)(\operatorname{sen} x + x \cos x)$$

tabella

f	f'
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$

con $\alpha \notin \mathbb{Z}$

$$x^\alpha = e^{\alpha \lg x}$$

$$\left(e^{\alpha \lg x}\right)' = e^{\alpha \lg x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\sqrt{1+x^3}$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left((1+x^3)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

$$\left(\sqrt[3]{1-3x} + x\right)' = \left((1-3x)^{\frac{1}{3}} + x\right)'$$

$$= \frac{1}{3}(1-3x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (-3) + 1$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{-\cancel{3}}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}} + 1$$

$$= \frac{-1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}} + 1$$

T. (derivata della funzione inversa)

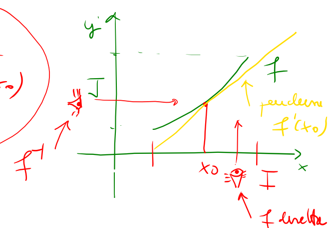
sia $f: I \to J$ $\quad$ I, J intervalli

f continua e invertibile con f^{-1} continua

sia $x_0 \in I$, f derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$

Allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e vale

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



T. (derivata della funzione inversa)

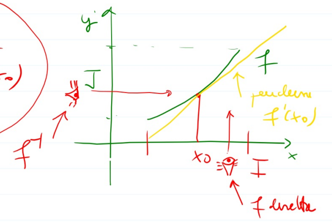
Sia $f : I \to J$ $\quad I, J$ intervalli

f continua e invertibile con f^{-1} continua

Sia $x_0 \in I$, f derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$

Allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e vale

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



dim.

devo vedere se c'è il limite del rapporto incrementale della f^{-1} nel punto $f(x_0)$

$$R^{f^{-1}}_{f(x_0)}(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

per calcolare questo limite cambio le variabili

$x = f^{-1}(y) \quad y = f(x)$

$y \to f(x_0) \quad x \to f^{-1}(f(x_0)) = x_0$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f(x_0)}}$$

C.V.D.

Applicazione

arctg è l'inversa di $tg|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

$f(x_0) = y_0$

$x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$(f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

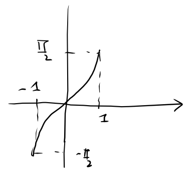
$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

$$(\text{arctg})'(y) = \frac{1}{(tg)'(\text{arctg}\, y)} = \frac{1}{1 + tg^2(\text{arctg}\, y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

f	f'
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$

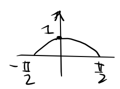
$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$



$\arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

su $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$



f	f'
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

analogamente $\boxed{(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

es. calcolare

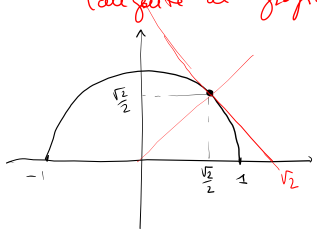
$$(\arcsin(x-\sin x))'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x-\sin x)^2}} \cdot (1-\cos x)$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sqrt{1-(x-\sin x)^2}}$$

ES. sia $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad f: [-1,1] \to \mathbb{R}$

determinare la equazione della retta tangente al grafico di f per il punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$



$y = \sqrt{1-x^2}$ ← semi circ.

$\Downarrow$

$y^2 = 1 - x^2$

$\boxed{x^2+y^2=1}$

$$\left(y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\right) \qquad \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = -1$$

$$y = -1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = -x + \sqrt{2}$$