Summary

- Rep: $\rho_R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V_R)$ $\qquad d_R = \dim V_R$

  $T^a \mapsto \rho_R(T^a) = t^a_R \leftarrow$ matrices s.t. $[t^a_R, t^b_R] = f^{ab}{}_c\, t^c_R$

- $H^i \xrightarrow{\rho_R} h^i_R = \rho_R(H^i)$ possono essere diagonalizzati simultaneam.

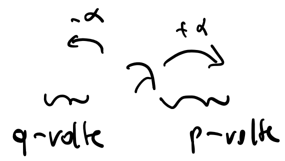
  $\to \exists$ base di V_R di autovettori di $\mathcal{H}$ $|\lambda\rangle$:

$$\rho_R(h)\,|\lambda\rangle = \lambda(h)\,|\lambda\rangle \qquad h \in \mathcal{H}$$

- $E_\alpha \xrightarrow{\rho_R} e^R_\alpha = \rho_R(E_\alpha)$

  $e^R_\alpha\,|\lambda\rangle = |\lambda+\alpha\rangle$ $\qquad e^R_{\pm\alpha}\,,\ \rho_R(H_\alpha)\quad sl_\alpha(2,\mathbb{C})$

- $$2\,\frac{(\alpha,\lambda)}{|\alpha|^2} = -(p-q) \in \mathbb{Z}$$



FUNDAMENTAL WEIGHTS (Pesi fondamentali)

- I pesi possono essere espansi nella base delle simple roots (i coeff. saranno non-interi in generale).

- Possiamo scegliere una base di $\mathcal{H}^*$ più conveniente con $\{\omega_i\}$ t.c.
$$(\omega_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$$
(base duale alle coroots sempl.)

- Gli ω_i $i=1,\dots,r$ sono detti **PESI FONDAMENTALI**.

- I coeff. λ_i di $\lambda = \sum_i \lambda_i \omega_i$ sono chiamati **Dynkin labels** e sono t.c. $\lambda_i = (\lambda, \alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}$ (*)

- Tali λ_i sono anche gli AUTOVALORI dei generatori di $\mathcal{H}$ nella base di Chevalley:
$$\lambda_i = \lambda(t_i) \qquad \text{con} \qquad t^i = 2\frac{\alpha_i \cdot H}{|\alpha_i|^2}$$

- $\underline{\lambda_i}$ (Dynkin label) sono distinti da $\underline{\lambda^i} \equiv \lambda(H_i)$
Base Cartan-Weyl

Relazione fra loro:
$$\lambda_i = \lambda(t_i) = \sum_j \frac{2\alpha_i^j}{|\alpha_i|^2} \lambda(H^j) = \frac{2}{|\alpha_i|^2} \sum_j \alpha_i^j \lambda^j$$
che è $(\lambda, \alpha_i^\vee)$

- Presa una base $\{t_i\}$ di $\mathcal{H}$, i numeri $\lambda_i = \lambda(t_i)$ individuano univocamente il funzionale lineare λ.

- Poiché i corre sulle simple roots, posso associare λ_i al nodo i-esimo del Dynkin diagram.

- Poiché $A_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j^\vee)$, le righe della matrice di Cartan danno i Dynkin labels delle root semplici:

$$\alpha_i = \sum_j A_{ij}\,\omega_j \qquad (\alpha_i, \alpha_j^\vee) = \sum_k A_{ik} \underbrace{(\omega_k, \alpha_j^\vee)}_{\delta_{kj}} = A_{ij}$$

Moltiplichiamo per $(A^{-1})_{ki}$, otteniamo

$$\omega_k = \sum_i (A^{-1})_{ki}\,\alpha_i$$

$\longrightarrow$ Matrice di Cartan ci dà il cambio di base in H^* tra $\{\omega_i\}$ e $\{\alpha_j\}$.

- Possiamo scrivere la norma (λ, λ) $\left(= \sum_i \lambda^i \lambda^i\right)$ in termini dei Dynkin labels λ_i:

$$(\lambda,\lambda) = \Big(\lambda, \sum_k \lambda_k \omega_k\Big) = \Big(\lambda, \sum_{k,m} \lambda_k (A^{-1})_{km}\,\alpha_m\Big) =$$

$$= \sum_{k,m} \lambda_k (A^{-1})_{km}\, \lambda_m \frac{|\alpha_m|^2}{2} .$$

- Un peso importante è il Weyl vector $\rho = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \rightsquigarrow$ Dynkin labels $(1,1,\dots,1)$

Vale la relazione $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$.

Dim. Dobbiamo dim. che $\left(\frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Delta^+} \beta , \alpha_i^\vee \right) = 1 \quad \forall\, i = 1, \dots, r$,

perchè $\sum_i \omega_i$ lo fa e due vettori sono uguali se il loro prodotto scalare (non-deg.) è uguale sugli elem. di una base.

- Ricordiamo che $(\beta, \alpha_i^\vee) = q_i - p_i$ dove q_i e p_i caratterizzano una α_i-string attraverso β.

- Ogni root positiva appartiene a una α_i-string.

- Prendiamo una di queste stringhe S

$\beta \in \Delta_+ \quad \beta = \sum_j k_j \alpha_j \quad k_j \geq 0 \quad ; \quad S = \{ \beta - q\alpha_i, \dots, \beta + p\alpha_i \}$

$\rightarrow \beta - q\alpha_i = \sum_{j \neq i} k_j \alpha_j + (k_i - q)\alpha_i$

1) è root positiva se uno dei $k_{j \neq i} \neq 0$ (cioè $q \leq k_i$ sempre, altrim. $\beta - q\alpha_i$ non è root)

$\Rightarrow$ tutte le root in S sono positive.

Inoltre $(\alpha, \alpha_i^\vee) = m \quad (\alpha \in S)$ sono autovalori di $H_{\alpha_i} \in sl_{\alpha_i}(2, \mathbb{C})$ e quindi assumono valori simmetrici rispetto allo zero.

2) può essere negativa se $k_j = 0 \quad \forall j \neq i$, ma allora la stringa è $-\alpha_i, 0, \alpha_i$ e solo α_i contribuisce a $S \cap \Delta_+$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha , \alpha_i^\vee \right) = \frac{1}{2} \underbrace{(\alpha_i, \alpha_i^\vee)}_{=2} + \frac{1}{2} \sum_{S \not\ni \alpha_i} \underbrace{\sum_{\alpha \in S} (\alpha, \alpha_i^\vee)}_{=0} = 1 \quad //$$

HIGHEST-WEIGHT REPRESENTATION

Vedremo ora che ogni IRREP finito-dim è specificato dalla scelta di un highest weight vector V_λ, che è completamente specificato da dei label sul diagr. di Dynkin.

L' highest weigh Λ di una rep. è qlo t.c. $\Lambda + \alpha \notin \Lambda_w$ $\forall \alpha \in \Delta_+$, cioè

$$e_R^\alpha |\Lambda\rangle = 0 \qquad \forall \alpha > 0$$

Per l' highest weigh, $p=0$ e

$$2\frac{(\Lambda, \alpha_i)}{|\alpha_i|^2} = q \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dynkin label di } \Lambda \text{ sono tutti non-negativi.}$$

Highest weight theorem:

$\forall \Lambda \in \Lambda_w$ che abbia i Dynkin label tutti non-negativi, $\exists !$ irrep. V_λ finito dimensionale.

$\lambda \in \Lambda_w$ (Dyn. label $\in \mathbb{Z}$) è implicato dalla richiesta di dim. finita: i Dyn. labels sono gli autovalori dei Cartan nelle sottoalg. $sl_\alpha(2, \mathbb{C})$ e qndi si può ripetere dim. fatta per $sl(2, \mathbb{C})$.

La highest root θ è l' highest weight della rap. Adj.

- Partendo dall' highest weight vector $|\Lambda\rangle$, si possono raggiungere tutti gli altri autovett. di $\mathcal{H}$ come

$$e^R_{-\alpha}\, e^R_{-\beta} \cdots e^R_{-\gamma} |\Lambda\rangle \quad \text{per} \quad \alpha, \beta, \dots, \gamma \in \Delta_+$$

$\downarrow$

In questo modo si ricostruisce operativamente la rep. (vedi sotto).

- C'è una formula per calcolare la dim. di V_Λ:

$$\boxed{\dim V_\Lambda = \frac{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (\Lambda + \rho, \alpha)}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (\rho, \alpha)} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{(\Lambda+\rho, \alpha^\vee)}{(\rho, \alpha^\vee)}}$$

dove $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha = \sum_i \omega_i$ è il Weyl vector con Dyn. labels $(1,1,\dots,1)$.

Es. Rep. $\underline{3}$ di $sl(3,\mathbb{C}) \rightsquigarrow \Lambda = (1,0)$ 

$$\dim V_{(1,0)} = \frac{(\Lambda+\rho, \alpha_1^\vee)(\Lambda+\rho, \alpha_2^\vee)(\Lambda+\rho, \alpha_3^\vee)}{(\rho, \alpha_1^\vee)\ (\rho, \alpha_2^\vee)\ (\rho, \alpha_3^\vee)} =$$

$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$

$\alpha_3^\vee = \alpha_1^\vee \cdot \frac{\cancel{(\alpha_1,\alpha_1)}}{\cancel{(\alpha_3,\alpha_3)}} + \alpha_2^\vee \frac{\cancel{(\alpha_2,\alpha_2)}}{\cancel{(\alpha_3,\alpha_3)}}$

$$= \frac{(\Lambda+\rho, \alpha_1^\vee)(\Lambda+\rho, \alpha_2^\vee)(\Lambda+\rho, \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee)}{(\rho, \alpha_1^\vee)(\rho, \alpha_2^\vee)(\rho, \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee)} =$$

$(\Lambda+\rho) = (2,1)$

$\rho = (1,1)$

$$= \frac{2 \cdot 1 \cdot (2+1)}{1 \cdot 1 \cdot (1+1)} = 3 \quad (\checkmark)$$

- I Dynkin labels ci dicono quante volte possiamo sottrarre la corrispondente simple root al peso:

$$\Lambda_i = q_i - p_i \quad , \text{ con } p=0 \text{ perché } \Lambda \text{ è highest weight}$$

Questo ci permette di ricostruire tutti i pesi di una data irrep labellata da Λ.

Vediamo come fare in qualche esempio.

ES. Rep. fundam. di A_2 $\quad \Lambda = (1, 0)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Partiamo da Λ: $\quad p_1 = 0 \ , \ q_1 = 1$ ← possiamo sottrarre root α_1 (una volta)

$$\lambda_1 = (1,0) - (2,-1) = (-1, 1)$$

- Partiamo da λ_1. Sappiamo che $p_1 = 1$ e $q_1 = 0$, compatib. con $(\lambda_1)_1 = -1$

Sappiamo che $p_2 = 0 \Rightarrow q_2 = 1$

$$e_{\alpha_2} |\lambda_1\rangle = \underbrace{e_{\alpha_2} \, e_{-\alpha_1}}_{\text{comm.}} |\lambda\rangle = e_{-\alpha_1}(e_{\alpha_2}|\lambda\rangle) = 0$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \alpha_2 = (-1, 1) - (-1, 2) = (0, -1)$$

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[d, "-\alpha_1"'] \\ \lambda_1 \arrow[d, "-\alpha_2"'] \\ \lambda_2 \end{tikzcd}$$

- Possiamo procedere da λ_2? Sappiamo che $p_2 = 1$, $q_2 = 0$.

$$e_{\alpha_1} |\lambda_2\rangle = e_{\alpha_1} e_{-\alpha_2} |\lambda_1\rangle = e_{-\alpha_2} e_{\alpha_1} |\lambda_1\rangle = e_{-\alpha_2} |\Lambda\rangle = 0$$

$\Rightarrow (0,-1)$ è il lowest weight. (non ci sono $(\lambda_2)_i > 0$, quindi non posso più scendere)

Posso ora ricostruirmi le matrici $e_{\pm\alpha_i}$, t_i in questa irrep:
$\uparrow$ Base di Chevalley

- I vettori di base sono

$$u_1 \equiv |1,0\rangle \qquad u_2 \equiv |-1,1\rangle = e_{-\alpha_1} u_1 \qquad u_3 \equiv |0,-1\rangle = e_{-\alpha_2} e_{-\alpha_1} u_1$$

- $e_{-\alpha_1} u_1 = u_2 \qquad e_{-\alpha_1} u_2 = 0 \qquad e_{-\alpha_1} u_3 = 0$

$$\Rightarrow \qquad e_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente:
$$e_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\in$:
$$e_{-\alpha_3} \equiv [e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre $t_1 u_1 = u_1 \qquad t_1 u_2 = -u_2 \qquad t_1 u_3 = 0$, analogam. t_2

$$\Rightarrow \qquad t_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Veniamo alle roots positive:

$q_1 = 0 \Rightarrow p_1 = 0$

$$e_{\alpha_1} u_1 = 0 \qquad e_{\alpha_1} u_2 = e_{\alpha_1} e_{-\alpha_1} u_1 = [e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}] u_1 = t_1 u_1 = u_1 \qquad e_{\alpha_1} u_3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad e_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogam. $e_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $e_{\alpha_3} = [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Ho ricostruito la rap. fondamentale.

Es. G_2 $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad (\mu_1, \mu_2)$

$\uparrow\ q_1 - p_1$

Highest weight has Dynkin labels $\Lambda = (0, 1)$

- $q_2 = 1 > 0 \longrightarrow$ tolgo α_2

  $(\Lambda - \alpha_2, \alpha_i^\vee)_{i=1,2} \longrightarrow (0,1) - (-1,2) = (1,-1)$

  $\Longrightarrow \quad p_1 = 0, \quad \underset{\sim\sim}{q_1 = 1}, \quad \underline{p_2 = 1}, \quad q_2 = 0$

  $e^{\alpha_1}|\lambda - \alpha_2\rangle = e^{\alpha_1} e^{-\alpha_2}|\lambda\rangle = e^{-\alpha_2} e^{\alpha_1}|\lambda\rangle = 0$

  $\Rightarrow p_1 = 0$

- tolgo α_1

  $(\Lambda - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_i^\vee)_{i=1,2} \longrightarrow (1,-1) - (2,-3) = (-1, 2)$

  $\Longrightarrow \quad p_1 = 1, \quad q_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad q_2 = 2$

  perché non ci siamo arrivati con $-\alpha_2$

$(0,1) \xrightarrow{-\alpha_2} (1,-1) \xrightarrow{-\alpha_1} (-1,2) \xrightarrow{-\alpha_2} (0,0) \xrightarrow{-\alpha_2} (1,-2) \xrightarrow{-\alpha_1} (-1,1) \xrightarrow{-\alpha_2} (0,-1)$

- tolgo α_2

  $(\Lambda - \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_i^\vee)_{i=1,2} \longrightarrow (-1,2) - (-1,2) = (0,0)$

  $\Longrightarrow \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \quad p_2 = 1, \quad q_2 = 1$

- tolgo α_2

  $(\Lambda - \alpha_1 - 3\alpha_2, \alpha_i^\vee) \longrightarrow (0,0) - (-1,2) = (1,-2)$

  $\Longrightarrow \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad q_2 = 0$

- tolgo α_1

$$(\Lambda - 2\alpha_1 - 3\alpha_2, \alpha_i^\vee) \to (1,-2) - (2,-3) = (-1,1)$$

$$\Rightarrow p_1 = 1, \; q_1 = 0, \quad p_2 = 0, \; q_2 = 1$$

- tolgo α_2

$$(\Lambda - 2\alpha_1 - 4\alpha_2, \alpha_i^\vee) \to (-1,1) - (-1,2) = (0,-1)$$

$$\Rightarrow p_1 = 0, \; q_1 = 0, \; p_2 = 1, \; q_2 = 0$$

Qui mi devo fermare.

$\longrightarrow$ Abbiamo costruito la rep. $\underline{7}$ di G_2.

Nota: Possiamo dividere i pesi in LIVELLI, ognuno caratterizzato da una LUNGHEZZA $\ell \equiv \sum_s k_s$ con k_s coeff. in $\Lambda - \sum_s k_s \alpha_s$.

Abbiamo visto che arrivati ad un livello non posso risalire al livello precedente se non attraverso la stessa strada.

Diciamo che siamo al peso $\Lambda - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2$, che ci siamo arrivati da $\Lambda - k_1\alpha_1 - (k_2-1)\alpha_2$ e che il livello k_1+k_2-1 (popolato a partire da Λ) non c'era peso $\Lambda - (k_1-1)\alpha_1 - k_2\alpha_2$

$\Rightarrow$ non possiamo salire da $\Lambda - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2$ a $\Lambda - (k_1-1)\alpha_1 - k_2\alpha_2$ perché se no dovrebbe darsi che $\Lambda - (k_1-1)\alpha_1 - k_2\alpha_2$ è un peso; ma allora avremmo dovuto arrivarci scendendo da Λ.

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda - k_1\alpha_1 - (k_2-1)\alpha_2 \arrow[dr, "-\alpha_2"] & & \Lambda - (k_1-1)\alpha_1 - k_2\alpha_2 \\
& \Lambda - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 \arrow[ur, dashed, "\alpha_1\ ?"'] &
\end{tikzcd}
$$

No

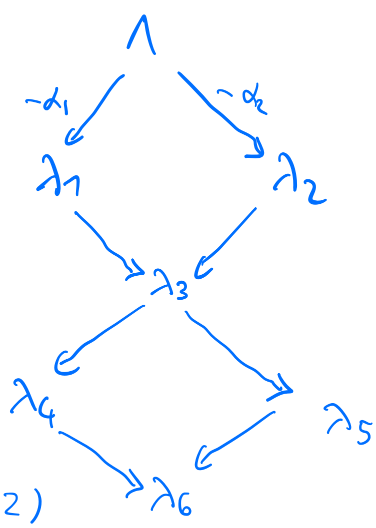
$\Downarrow$

$p_1 = 0$.

$\Rightarrow$ Algoritmo: parto da Λ, riempio livello inferiore, parto da tale livello e vedo come posso raggiungere livello inferiore, sapendo che non posso riempire siti vuoti di livello superiore; rifaccio lo stesso al livello successivo.

ES. Rep. Aggiunta di A_2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Lambda = (1, 1)$



- Posso togliere entrambe le roots semp.

$\lambda_1 = \Lambda - \alpha_1 = (-1, 2)$

$\lambda_2 = \Lambda - \alpha_2 = (2, -1)$

- Partiamo da λ_1: $q_1 = 0, p_1 = 1$; $p_2 = 0, q_2 = 2$

$\lambda_3 = \lambda_1 - \alpha_2 = (0, 0)$ $\quad \lambda_5 = \lambda_1 - 2\alpha_2 = (1, -2)$

Partiamo da λ_2:

$\lambda_3 = \lambda_2 - \alpha_1 = (0, 0)$ $\quad \lambda_4 = \lambda_2 - 2\alpha_1 = (-2, 1)$

- Se volessimo partire da $\lambda_3 = (0, 0)$: $q_1 = p_1 = 1$, $q_2 = p_2 = 1$.

- Partiamo da $\lambda_4 = (-2, 1)$: $p_1 = 2, q_1 = 0$; $p_2 = 0, q_2 = 1$

$\lambda_6 = \lambda_4 - \alpha_2 = (-1, -1)$ Partiamo da λ_5 ma arrivo in λ_6.

$\rightarrow$ 7 pesi; c'è uno di molteplicità 2?

Ricostruiamo la rep. agg.. Ci sono due autosp. che potrebbero avere deg=2, controlliamo se vett. sono dip. o no

$V_\lambda = \langle |\Lambda\rangle \rangle$

$V_{\lambda_1} = \langle E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle \rangle$

$V_{\lambda_2} = \langle E_{-\alpha_2} |\Lambda\rangle \rangle$

Troviamo comb. lin. dei due vett. che ha $\|\,\|^2 \neq 0$ ed è $\perp$ a primo vett.

$V_{\lambda_3} = \langle E_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} |\Lambda\rangle, E_{-\alpha_2} E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle \rangle$

$V_{\lambda_4} = \langle E^2_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} |\Lambda\rangle \rangle$

$V_{\lambda_5} = \langle E^2_{-\alpha_2} E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle \rangle$

$V_{\lambda_6} = \langle E_{-\alpha_1} E^2_{-\alpha_2} E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle, E_{-\alpha_2} E^2_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} |\Lambda\rangle \rangle$

Due vett. sono dip. se e solo se $\langle v_1, v_2\rangle^2 = \|v_1\|^2\|v_2\|^2$ ⊛

$\Lambda=(1,1)$
$\alpha_1=(2,-1)$
$\alpha_2=(-1,2)$

• $v_1 = E_{-\alpha_1}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle \qquad v_2 = E_{-\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle$

$$\|v_1\|^2 = (E_{-\alpha_1}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle, E_{-\alpha_1}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle) = (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2}\overbrace{E_{\alpha_1}E_{-\alpha_1}}^{E_{-\alpha_1}E_{\alpha_1}+t_1}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle) =$$

$$= (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2}\underbrace{E_{-\alpha_1}E_{\alpha_1}\overset{\text{comm.}}{E_{-\alpha_2}}|\Lambda\rangle}_{=0}) + (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2}\, t_1(E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle)) =$$

$$= 0 + 2(|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle) =$$

$$= 2(|\Lambda\rangle, (\cancel{E_{-\alpha_2}E_{\alpha_2}} + t_2)|\Lambda\rangle) = 2\||\Lambda\rangle\|^2$$

$\|v_2\|^2 = 2\||\Lambda\rangle\|^2$ (stessi passaggi formali)

$$(v_2, v_1) = (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{\alpha_2}\overset{\text{comm.}}{E_{-\alpha_1}}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle) = (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{-\alpha_1}(E_{-\alpha_2}E_{\alpha_2}+t_2)|\Lambda\rangle) = \||\Lambda\rangle\|^2$$

$\Rightarrow$ v_1 e v_2 sono indip. e molt. di $(0,0)$ è $\# = 2$!

• $v_1 = E_{-\alpha_1}E^2_{-\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle \qquad v_2 = E_{-\alpha_2}E^2_{-\alpha_1}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle$

$[E^2_{\alpha_i}, E^2_{-\alpha_i}] = E_\alpha[E_\alpha, E^2_{-\alpha}] + [E_\alpha, E^2_{-\alpha}]E_\alpha =$
$= E_\alpha E_{-\alpha}t_\alpha + E_\alpha t_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha}t_\alpha E_\alpha + t_\alpha E_{-\alpha}E_\alpha$

$\underline{(1,1)-(2,-1)-2(-1,2)}$

$$\|v_1\|^2 = (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E^2_{\alpha_2}E_{\alpha_1}E_{-\alpha_1}E^2_{-\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle) =$$

$$= (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E^2_{\alpha_2}E_{-\alpha_1}E_{\alpha_1}\overset{\text{comm.}}{E^2_{-\alpha_2}}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle) + (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E^2_{\alpha_2}\, t_1\, E^2_{-\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle) =$$

$$= (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E^2_{\alpha_2}E_{-\alpha_1}E^2_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle) + 1\cdot(|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E^2_{\alpha_2}E^2_{-\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle)$$

$$= (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{-\alpha_1}E^2_{\alpha_2}E^2_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle) + (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{\alpha_2}E_{-\alpha_2}t_{\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle)^{(2)} +$$

$$+ (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{\alpha_2}t_{\alpha_2}E_{-\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle)^{(0)} + (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}\cancel{E_{-\alpha_2}t_{\alpha_2}}E_{\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle) +$$

$$+ (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}t_{\alpha_2}\cancel{E_{-\alpha_2}}E_{\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle) + (v_\lambda, E_{\alpha_1}\cancel{E^2_{-\alpha_2}}E^2_{\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle)$$

$$= (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{-\alpha_1}(E_{\alpha_2}E_{-\alpha_2}t_{\alpha_2} + E_{\alpha_2}t_{\alpha_2}E_{-\alpha_2} + \cancel{E_{-\alpha_2}t_{\alpha_1}}E_{\alpha_2} + t_{\alpha_2}\cancel{E_{-\alpha_2}}E_{\alpha_2})|\Lambda\rangle) +$$

$$+ \underline{2}(|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{\alpha_2}E_{-\alpha_2}E_{-\alpha_1}|\Lambda\rangle) = 2\|v_\lambda\|^2$$

$$= (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{-\alpha_1}E_{\alpha_2}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle) - (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_1}E_{-\alpha_1}E_{\alpha_2}E_{-\alpha_2}|\Lambda\rangle) + 4\||\Lambda\rangle\|^2 = 4\||\Lambda\rangle\|^2$$

$\|v_2\|^2 = 4\||\Lambda\rangle\|^2$

⊛ Qui usiamo che in ogni irrep. finito dim., esiste una forma hermit. su V_R, t.c. $e_\alpha^\dagger = e_{-\alpha}$

$[E_\alpha, E_{-\alpha}^2] = E_{-\alpha} t_\alpha + t_\alpha E_{-\alpha}$

$[E_\alpha^2, E_{-\alpha}] = E_\alpha t_\alpha + t_\alpha E_{-\alpha}$

$$(v_2, v_1) = (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2} E_{\alpha_1}^2 E_{\alpha_2} E_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2}^2 E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle) =$$

$$= (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2} E_{\alpha_1}^2 \cancel{E_{-\alpha_1}} E_{-\alpha_2}^2 E_{\alpha_2} E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle) + (|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2} E_{\alpha_1}^2 E_{-\alpha_1} (E_{-\alpha_2} t_{\alpha_2} + t_{\alpha_2} E_{-\alpha_2}) E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle)$$

$$= 2(|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2} E_{\alpha_1}^2 E_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle) + 0 \cdot (|\Lambda\rangle, \dots) =$$

$$= 2(|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2} (E_{\alpha_1} \cancel{t_{\alpha_1}} + t_{\alpha_1} E_{\alpha_1}) E_{-\alpha_2} E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle) + 2(|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2} E_{-\alpha_1} E_{\alpha_1}^2 E_{-\alpha_2} E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle)$$

$$= 2(-2)(|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} E_{-\alpha_2} E_{-\alpha_1} |\Lambda\rangle) + 2(|\Lambda\rangle, E_{\alpha_2} E_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} (E_{\alpha_1} t_{\alpha_1} \cancel{+ t_{\alpha_1} E_{\alpha_1}}) |\Lambda\rangle)$$

$$= -4 \, \| |\Lambda\rangle \|^2$$

$\Rightarrow (v_2, v_1)^2 = \|v_2\|^2 \|v_1\|^2 \Longrightarrow$ v_1 e v_2 sono dip.

$\Rightarrow$ molt. di $(-1,-1)$ è $\# = 1$.

Rappresentazione coniugata ρ^*_R

Abbiamo def. ρ^*_R come qlla rep. t.c. $\rho^*_R(x) = -\rho_R(x)^T$

in qualche base di V_R (con segni e normal. giusti)

- Se λ è peso di R, $-\lambda$ è peso di R^*.

  Prendiamo $h \in \mathcal{H}$. Se $\lambda(h)$ è autovalore di $\rho_R(h)$, allora $-\lambda(h)$ è autovalore per $-\rho_R(h)^T = \rho_{R^*}(h)$.

  Siccome $(R^*)^* = R$, abbiamo che i pesi di R^* sono i negativi dei pesi di R.

- Sia Λ_{low} lowest weight di $R \Rightarrow \Lambda_{low} - \alpha_i$ non è un peso

  (simple root)

  $\Rightarrow (-\Lambda_{low}) + \alpha_i$ non è un peso $\forall \alpha_i$ simple root: allora

  $$\Lambda^* = -\Lambda_{low} \quad \text{highest weight di } R^*$$

- Se $-\Lambda_{low} = \Lambda$, la rep. V_Λ si dice SELF-CONIUGATA o (pseudo) reale.

  Un esempio è la rep. $\underline{2}$ di $su(2)$, in cui $\alpha = 2$ e $\Lambda = 1$, $\Lambda_{low} = -1$.

  La rep. $\underline{3}$ di $su(3)$ invece è diversa da $\overline{3}$ (vedi es.)

- R e R^* hanno stesso sistema di pesi, con segno invertito

  $\Rightarrow d_R = d_{R^*}$.

- Per A_r abbiamo che

se $\Lambda = \sum_{i=1}^{r} a_i \omega_i$, allora $\Lambda_{low} = \sum_{i=1}^{r} a_i (-\omega_{r-i})$

$\Rightarrow$ Se R ha highest weight $\Lambda = (a_1, \dots, a_r)$

allora R^* ha highest weight $\Lambda^* = -\Lambda_{low} = (a_r, \dots, a_1)$.

Anche D_r ed E_6 hanno rep. coniugate non-equivalenti.
Le altre algebre hanno tutte rep. self-coniugate.

A_2 example

$\alpha_1 \text{ o—o } \alpha_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Roots: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1-\alpha_2$

Generators $E^{\pm\alpha_1}, E^{\pm\alpha_2}, E^{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}, t^1, t^2$

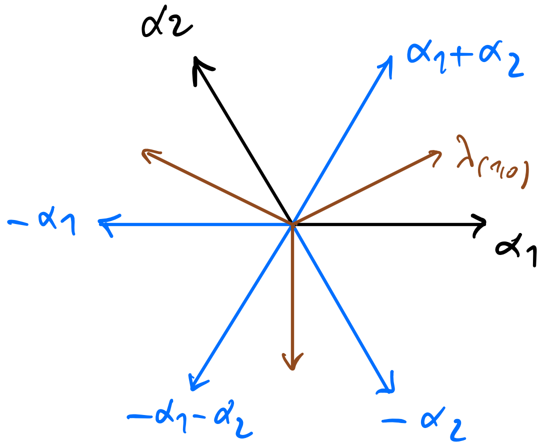
Base di Chevalley

$[t^i, t^j] = 0$

$[t^i, E^{\alpha_j}] = A_{ji} E^{\alpha_j}$

$[t^i, E^{-\alpha_j}] = -A_{ji} E^{-\alpha_j}$

$[E^{\alpha_i}, E^{-\alpha_j}] = \delta_{ij} t^j$



$$\underbrace{\frac{2(\alpha_i, \lambda)}{|\alpha_i|^2}}_{\text{Dynkin labels wrt to node } i} = -(p_i - q_i) \in \mathbb{Z}$$

$(1,0) \Rightarrow \lambda \perp \alpha_2 \Rightarrow \lambda = c \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$1 = \frac{2(\alpha_1, \lambda)}{|\alpha_1|^2} = \frac{c\sqrt{3}}{|\alpha_1|} \Rightarrow c = \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{3}}$

Rep. 3: $\Lambda = (1,0) \xrightarrow{-\alpha_1} (-1,1) \xrightarrow{-\alpha_2} (0,-1) = \Lambda_{low}$

Rep. $\bar{3}$: $\Lambda^* = -\Lambda_{low} = (0,1) \xrightarrow{-\alpha_2} (1,-1) \xrightarrow{-\alpha_1} (-1,0)$

Costruiamoci la $\bar{3}$: Scegliamo come base

$u_1 \equiv V_{(-1,0)} = e_{-\alpha_1} e_{-\alpha_2} V_{(0,1)} \qquad u_2 \equiv -V_{(1,-1)} = -e_{-\alpha_2} V_{(0,1)} \qquad u_3 \equiv V_{(0,1)}$

$t_1^{\bar{3}} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = -(t_1^3)^T \qquad t_2^{\bar{3}} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = -(t_2^3)^T$

$e_{-\alpha_1}^{\bar{3}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(e^3_{\alpha_1})^T \qquad e_{-\alpha_2}^{\bar{3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(e^3_{\alpha_2})^T$

e così via.

$\Rightarrow$ Abbiamo trovato una base di V_R in cui $t_{\bar{3}}^a = -(t_3^a)^T$.