21 Novembre

Teorema (della media)

Sia $f \in C^0([a,b])$, allora $\exists\, c \in [a,b]$ t.c.

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \fint_a^b f(x)\,dx$$

<u>Dim</u> Poiché $f \in C^0([a,b])$ segue che $\exists\, x_m$ e x_M punto di minimo assoluto e punto di massimo assoluto di f in $[a,b]$, cioè

$$m := f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) =: M \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

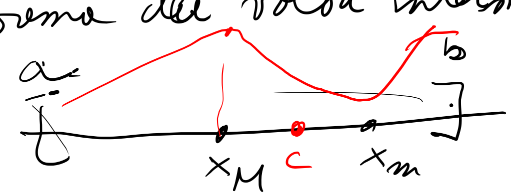
Per la Monotonia dell'integrale si ha

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

$$f(x_m) = m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M = f(x_M)$$

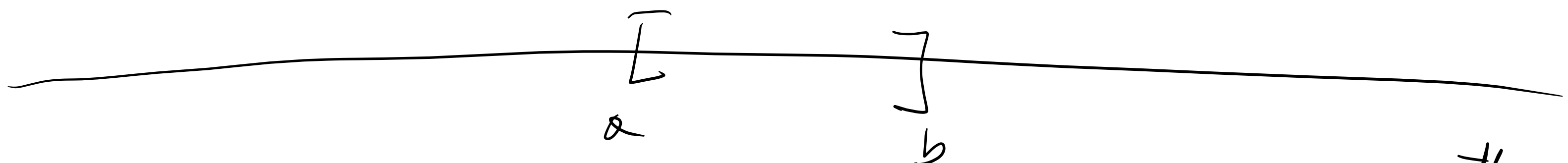
Quindi $\fint_a^b f(x)\,dx$ e' un punto intermedio tra i valori $f(x_m)$ e $f(x_M)$. Per il Teorema dei valori intermedi

$\exists\, c$ tra x_m e x_M



t.c. $f(c) = \fint_a^b f(x)\,dx$.

Def Sia $f : I \to \mathbb{R}$ I un intervallo qualsiasi
Si dice che f è localmente integrabile in I, e scrivo $f \in L_{loc}(I)$, se $f \in L([a,b])$ per ogni $[a,b] \subset I$ chiuso e limitato.



Es 1)

$$f \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in C^0([a,b]) \quad \forall [a,b] \text{ compatto}$$

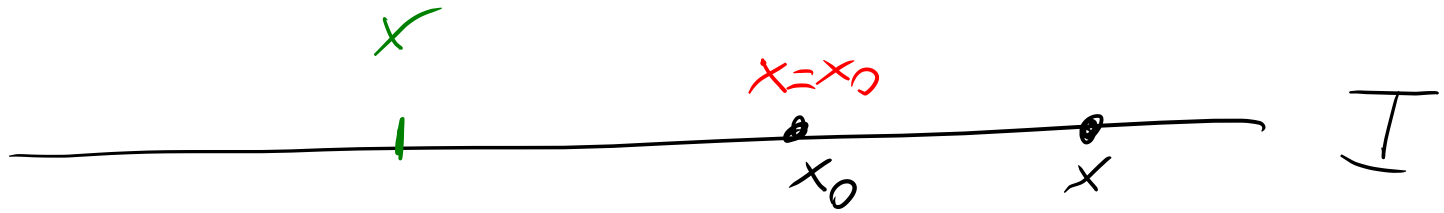
$$\Rightarrow f \in L([a,b]) \quad \forall [a,b] \text{ compatto}$$

Cioè $f \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L_{loc}(\mathbb{R})$

Esempio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona $\Rightarrow f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona $\forall [a,b]$ compatto $\Rightarrow f \in L([a,b])$ $\forall [a,b]$ compatto $\Rightarrow f \in L_{loc}(\mathbb{R})$

Esempio 3. Se $f, g \in L_{loc}(\mathbb{R})$ allora
$f(x) \cdot g(x)$ o $\lambda f + \mu g$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sono
funzioni in $L_{loc}(\mathbb{R})$.

Def (Funzione integrale)



Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ ed $f \in L_{loc}(I)$

Definirò una funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt & \text{l'integrale di Darboux in } [x_0, x] \text{ se } x > x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \\ -\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt & \text{l'integrale di Darboux in } [x, x_0] \text{ se } x < x_0 \end{cases}$$

Teor Se $f \in L_{loc}(I)$ e $x_0 \in I$ allora

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \in C^0(I).$$

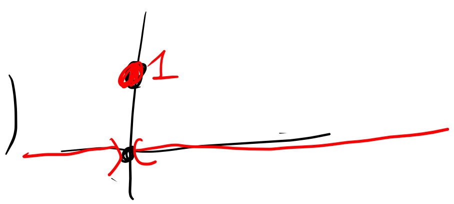
Teor (Fondamentale del Calcolo)

Sia $f \in L_{loc}(I)$, $x_0 \in I$ e sia $\underline{\underline{\bar{x}}} \in I$. Supponiamo che

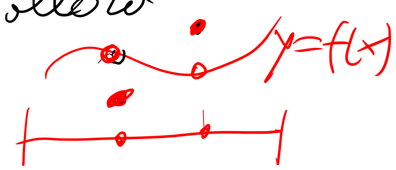
$$\lim_{x \to \bar{x}^+} f(x) = f(\bar{x}^+) \quad \text{esista finito}$$

allora:

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right)'_d (\bar{x}) = f(\bar{x}^+)$$



Se $\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = f(\bar{x}^-)$ esiste finito, allora



$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right)'_s (\bar{x}) = f(\bar{x}^-)$$

Nel caso particolare in cui $f(\bar{x}^+) = f(\bar{x}^-)$ allora

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right)' (\bar{x}) = f(\bar{x}^+) = f(\bar{x}^-)$$

Nel caso particolare in cui f è continua in $\bar{x}$ allora

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right)' (\bar{x}) = f(\bar{x}^+) = f(\bar{x}^-) = f(\bar{x})$$

<u>Corollario</u> Se $f \in C^0(I)$ segue che

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right)' (x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I.$$

Osservazione Se $f \in L_{loc}(I)$ vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\forall\ a, b, c \in I. \quad (\text{Chasles})$$

Dim corollario Sia $f \in C^0(I)$ e sia $x_0, \bar{x} \in I$

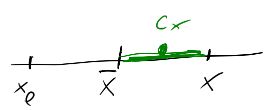
allora $$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)'(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

E' sufficiente dimostrare che

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)'_d(\bar{x}) = \left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)'_s(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

Dimostrerò solo $$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)'_d(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Prendo $x > \bar{x}$



$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}{x - \bar{x}}$$

$$= \frac{\cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt} + \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}}{x - \bar{x}} = \underbrace{\frac{\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt}{x - \bar{x}}}_{= f(c_x)}$$

Dalla teorema della media ricavo che $\exists\ c_x \in [\bar{x}, x]$ t.c.

$\forall\ x > \bar{x} \quad \exists \quad c_x \in [\bar{x}, x]$ t.c.

$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}{x - \bar{x}} = f(c_x)$$

$$\bar{x} \le c_x \le x$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$\bar{x} \quad \bar{x}$$

$\downarrow x \to \bar{x}^+$

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}{x - \bar{x}} = \lim_{x \to \bar{x}^+} f(c_x) = f(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)'_d(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

Esercizio   Dimostrare che $o(o(x)) = o(x)$

Esercizio $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+2x} - \sqrt{x^3+5}}{e^x\left(e^{x+3e^{-x}} - e^x - 3\right)}$

$$\frac{\sqrt{x^3+2x} - \sqrt{x^3+5}}{e^x\left(e^{x+3e^{-x}} - e^x - 3\right)} = \frac{\sqrt{x^3+2x} + \sqrt{x^3+5}}{\sqrt{x^3+2x} + \sqrt{x^3+5}} \cdot \frac{\sqrt{x^3+2x} - \sqrt{x^3+5}}{e^x\left(e^{x+3e^{-x}} - e^x - 3\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^3+2x} + \sqrt{x^3+5}} \cdot \frac{\cancel{x^3} + 2x - \cancel{x^3} - 5}{e^x\left(e^{x+3e^{-x}} - e^x - 3\right)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}x^{\frac{3}{2}}(1+o(1))} \cdot \frac{\cancel{2}x(1+o(1))}{e^x\left(e^{x+3e^{-x}} - e^x - 3\right)}$$

$$= \underline{(1+o(1))} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\, e^x\left(e^{x+3e^{-x}} - e^x - 3\right)} =$$

$$e^{x+3e^{-x}} - e^x - 3 = e^x\left(\underline{e^{3e^{-x}} - 1 - 3e^{-x}}\right)$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$e^y - 1 - y = \frac{y^2}{2} + o(y^2) = \frac{y^2}{2}(1+o(1))$$

$$e^{3e^{-x}} - 1 - 3e^{-x} = \frac{(3e^{-x})^2}{2}\underline{(1+o(1))}$$

$$= \frac{(1+o(1))}{1+o(1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\,\cancel{e^{2x}}\,\frac{9\cancel{e^{-2x}}}{2}}$$

$$= (1+o(1))\frac{2}{9\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{\sin x}{x}} - e}{x^2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + o(1)$$

$$\frac{e^{\frac{\sin x}{x}} - e}{x^2} \qquad \frac{e^{1+o(1)} - e}{x^2} = \frac{e - e}{x^2} = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\frac{e^{\frac{\sin x}{x}} - e}{x^2} = \frac{e^{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} - e}{x^2} = e \, \frac{e^{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)} - 1}{x^2}$$

$$= e \, \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{6} + o(x^2) - \cancel{1}}{x^2}$$

$$= e \, \frac{-\frac{\cancel{x^2}}{6}(1 + o(1))}{\cancel{x^2}} \xrightarrow{x \to 0} -\frac{e}{6}.$$

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

$$e^{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$