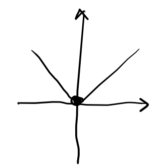
Lezione 31 - 21/11/2025

T. se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0

non vale il viceversa

Esempio $f(x) = |x|$ con $x_0 = 0$



$|x|$ è continua in 0 perché $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

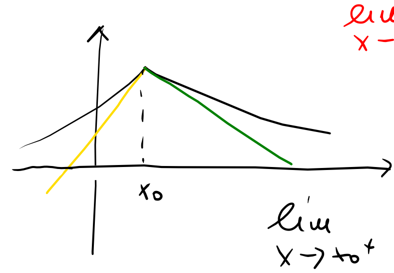
$$R_0^{|\cdot|}(x) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} R_0^{|\cdot|}(x)$ non esiste

perché $\lim_{x \to 0^+} R_0^{|\cdot|}(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} R_0^{|\cdot|}(x) = -1$

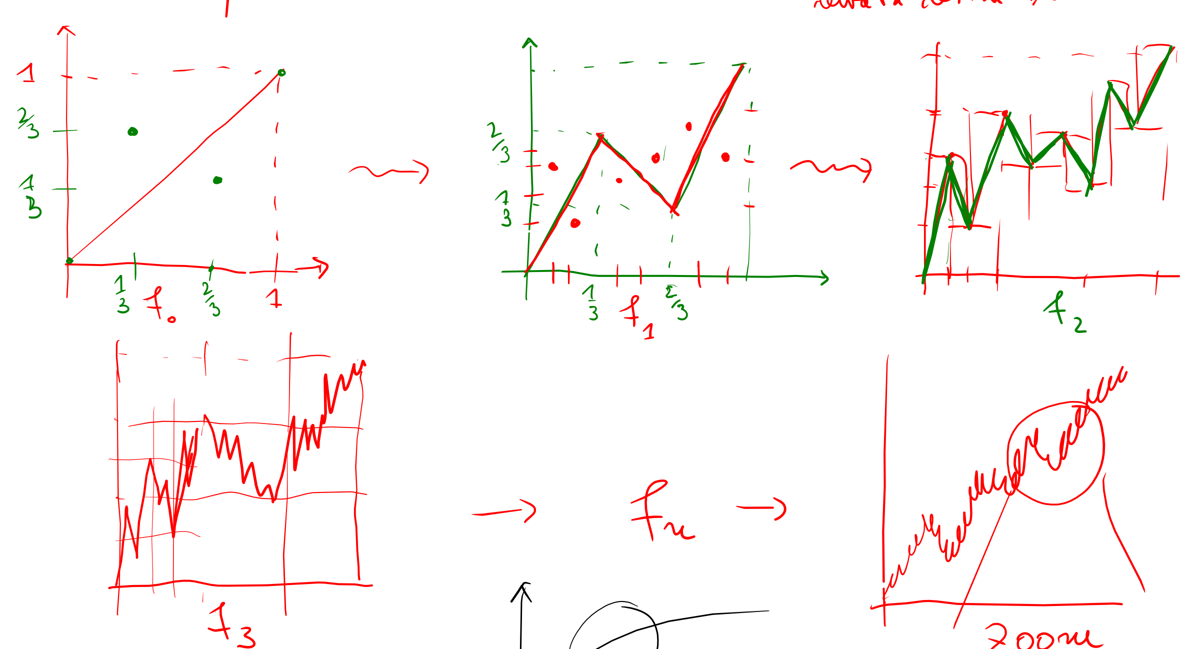
punto angoloso

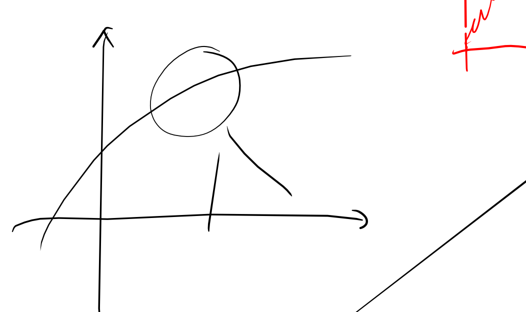


$$\underbrace{\lim_{x \to x_0^+} R_{x_0}^f(x)}_{f'_+(x_0)} \neq \underbrace{\lim_{x \to x_0^-} R_{x_0}^f(x)}_{f'_-(x_0)}$$

derivata destra d sinistra

le cose possono essere anche molto complicate





Massimi e minimi (assoluti e relativi)

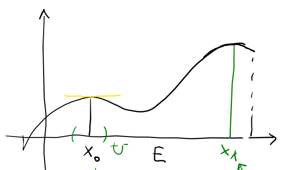
def. Sia $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$

x_0 si dice punto di massimo assoluto (minimo assoluto) se

$\forall x \in E, \quad f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$)

x_0 si dice punto di massimo relativo (minimo relativo) se

$\exists U$ intorno di x_0 : $\forall x \in U \cap E, \quad f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$)



Teorema (FERMAT)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I intervallo

sia $x_0 \in I$

se 1) x_0 è punto di max o min relativo
2) x_0 è punto interno a I
3) la f in x_0 è derivabile

Allora $f'(x_0) = 0$

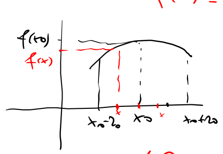
dim. x_0 è max relativo $\Rightarrow \exists \tilde{r} > 0 : \forall x \in I \cap]x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}[\quad f(x) \le f(x_0)$

x_0 è interno a I $\Rightarrow \exists r > 0 :]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq I$

$\Downarrow$

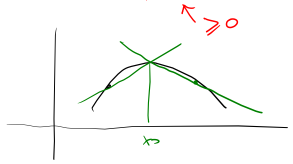
$\exists r_0 > 0$ t.c. $\forall x \in]x_0 - r_0, x_0 + r_0[\quad f(x) \le f(x_0)$

$r_0 = \min\{r, \tilde{r}\}$



$x \in]x_0 - r_0, x_0[$, $R^f_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\quad$ numeratore ≤ 0, denominatore ≤ 0 $\Rightarrow R^f_{x_0}(x) \ge 0$ a sinistra

$x \in]x_0, x_0 + r_0[$, $R^f_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\quad$ numeratore ≤ 0, denominatore ≥ 0 $\Rightarrow R^f_{x_0}(x) \le 0$ a destra



però f è derivabile quindi il $\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x)$ esiste finito $= f'(x_0)$

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0^-} \underbrace{R^f_{x_0}(x)}_{\ge 0}} = f'(x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} \underbrace{R^f_{x_0}(x)}_{\le 0}}$$

permanenza del segno $\to$ $\lim \ge 0$ $\qquad$ $\lim \le 0$ $\leftarrow$ permanenza del segno

devono essere uguali $\qquad$ il limite è 0.

<u>CVD</u>

Teorema (FERMAT)

sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ I intervallo

sia $x_0 \in I$

se 1) x_0 è punto di max o min relativo

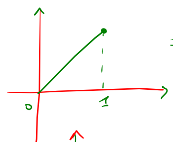
2) x_0 è punto interno a I

3) la f in x_0 è derivabile

Allora $f'(x_0) = 0$

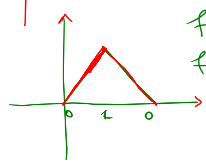
oss. tutte e 3 le ipotesi sono necessarie!!!

Es. x_0 di max
x_0 derivabile
x_0 non interno



$f(x) = x$
$[0,1]$

x_0 di max
x_0 interno
x_0 non derivabile



f su $[0,2]$

$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Applicazione:

supponiamo $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f sia continua in $[a,b]$ e derivabile almeno in $]a,b[$

i) ¿ f ha massimo assoluto? (minimo) $\qquad$ Sì per W.

ii) ¿ dove sono i punti di max?

↗ o sono negli estremi,

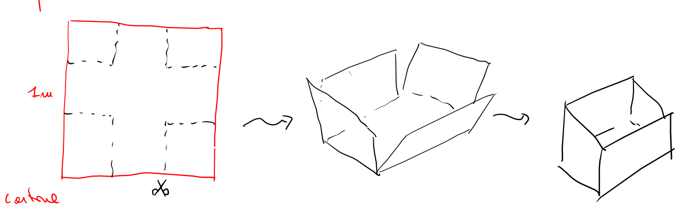
↘ o in un punto interno.

↘ allora in tali punti $f'(x_0) = 0$

Conclusione

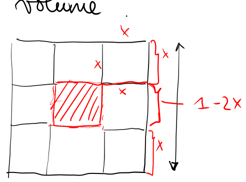
i pti di max e min assoluti li cerco tra gli estremi a, b e i punti in cui si annulla la derivata

Esempio

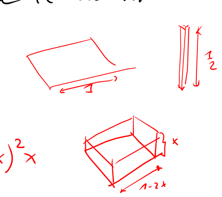


taglio 4 quadrati ai vertici, piego, ottengo una scatola (senza coperchio)

determinare come tagliare per ottenere il massimo volume



$x \in [0, \frac{1}{2}]$



$V(x) = (1-2x)^2 x$

$V: [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (1-2x)^2 x = 4x^3 - 4x^2 + x$

¿ è continua su $[0,1]$? sì.

¿ è derivabile su $]0,1[$? sì

$V: [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto (1-2x)^2 x = 4x^3 - 4x^2 + x$

è continua in $[0, \frac{1}{2}]$? sì.
è derivabile in $]0, \frac{1}{2}[$? sì

cerco i punti in cui si annulla $V'(x)$

$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1 \qquad V'(x) = 0$

$$x_{1,2} = \frac{8 \mp \sqrt{64-48}}{24} = \frac{8 \mp 4}{24} = \begin{cases} \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\ \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

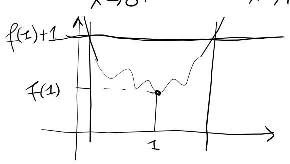
V' si annulla $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$
gli estremi dell'int. sono $0, \frac{1}{2}$

il max e il minimo sono in questi 3 punti
$0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$

$$V(0) = 0, \quad V\left(\tfrac{1}{6}\right) = 4 \cdot \frac{1}{216} - 4 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{6} = \frac{2}{27}, \quad V\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

$$= \frac{4 - 24 + 36}{216} = \frac{16}{216}$$

Applicazione: supponiamo $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
f sia derivabile
e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



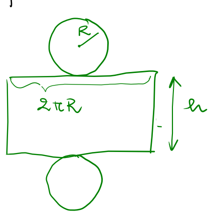
¿ha minimo assoluto?

$f(1)$ | sì

(si ragiona con W. e si usano i limiti)

¿dove è il punto di minimo?
è tra i punti in cui si annulla la derivata

Es. voglio costruire una lattina in alluminio consumando il minimo possibile
che forma deve avere?



$S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot h$

$V = \pi R^2 \cdot h$

V fisso ottengo

$h = \frac{V}{\pi R^2}$

ho $S = S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2}$
$= 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$

$S:]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$R \longmapsto 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$

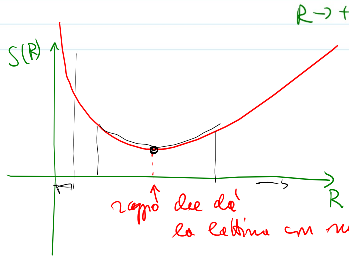
$\lim_{R \to 0^+} S(R) = +\infty$
$\lim_{R \to +\infty} S(R) = +\infty$

$S:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$R \longmapsto 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$

$\lim_{R\to 0^+} S(R) = +\infty$

$\lim_{R\to +\infty} S(R) = +\infty$



raggio che dà la lattina con minimo alluminio.

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$ $\qquad f'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$

$f'(x) = 0$ per $4\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$

$\frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}$

$4\pi x^3 - 2V = 0 \qquad x^3 = \frac{V}{2\pi}$

$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

raggio lattina "ideale" $\quad R = \sqrt[3]{\frac{\text{Volume}}{2\pi}} =$

$h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V^{\cancel{1}\,\frac{1}{3}}}{\pi \cdot \frac{\cancel{V^{2/3}}}{(2\pi)^{2/3}}}$

$= \frac{V^{\frac{1}{3}}}{\cancel{\pi} \cdot \frac{1}{2^{2/3} \cdot \cancel{\pi^{2/3}}}} = 2^{2/3} \cdot \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

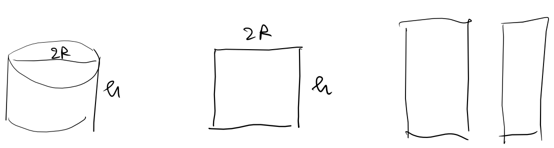
$2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$

$2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$

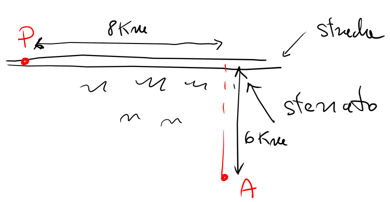
$= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = R$

concludiamo nella lattina ideale $\boxed{h = 2R}$

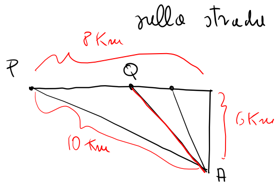


ES.



voglio andare da P ad A con un fuoristrada

nella strada a 60 km/h nello sterrato 30 km/h



quale percorso mi fa impiegare meno tempo.

$v = \frac{s}{t}$

$t = \frac{s}{v}$

$PQ = x$

x km su strada

$\sqrt{(8-x)^2+6^2}$ km su sterrato

t_1 = tempo su strada $= \frac{x}{60}$

t_2 = tempo su sterrato $= \frac{\sqrt{100-16x+x^2}}{30}$

t_1 = tempo in strada $= \dfrac{x}{60}$

t_2 = tempo in sterrato $= \dfrac{\sqrt{100-16x+x^2}}{30}$

$$f: [0,8] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{60} + \frac{\sqrt{100-16x+x^2}}{30}$$

$\sqrt{100-16x+x^2}$

$(100-16x+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{60} + \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{2}(100-16x+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-16)$$

$$= \frac{1}{60}\left(1 + \frac{2x-16}{\sqrt{100-16x+x^2}}\right)$$

$f'(x) = 0$ se $1 + \dfrac{2x-16}{\sqrt{100-16x+x^2}} = 0$

$$2x-16 = -\sqrt{100-16x+x^2}$$

$$(2x-16)^2 = 100-16x+x^2$$

$$4x^2-64x+256 = 100-16x+x^2$$

$$3x^2-48x+156 = 0$$

$x_{1,2}$ <

minimo

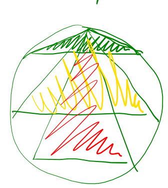
4,4 $\in [0,8]$

?

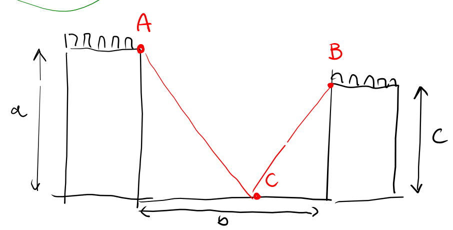
finire il conto!

Es.

tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza trovare quello di area massima



Es.



2 torri

determinare C in modo che $\overline{AC} + \overline{CB}$ sia minimo,