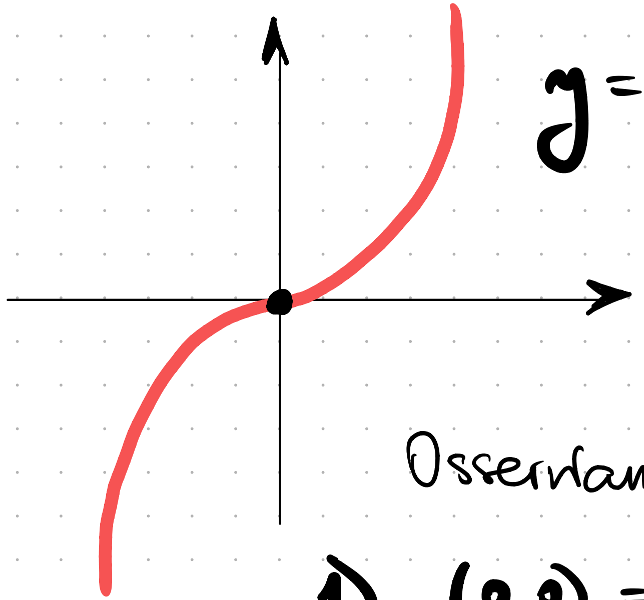
§ 11. Curva Hessiana & punti di flesso



$y = x^3 \Rightarrow P = (0,0)$ É DI FLESSO

vogliamo generalizzare questo concetto.

Osserviamo che:

1). $(0,0) = Z(y - x^3)$ LISCIO

2). $I_{(0,0)}(y - x^3, \underbrace{\tau_{(0,0)}(Z(y-x^3))}_{=y}) = 3$

SAPPIAMO CHE $I_Q(F, \tau_Q(F)) \geq 2$, MA QUESTO É DI PIÚ DEL MINIMO

PERCHÉ LA RETTA TANGENTE É L'ASSE x, OVVERO LA RETTA $y=0$, E INOLTRE:

$$\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = 0$$

$\boxed{\text{DEF}}$ **[FLESSO]** $q \in Z(f) \subset \mathbb{A}^2$ oppure $Q \in Z_{\mathbb{P}}(F) \subset \mathbb{P}^2$ sono **DI FLESSO**

$$\overset{\text{DEF}}{\iff} \begin{cases} q \text{ (risp. } Q) \text{ è } \textbf{LISCIO} \\ I_q(f, t_q(Z(f))) \geq 3 \quad (\text{risp. } I_Q(F, \tau_Q(Z_{\mathbb{P}}(F))) \geq 3 \end{cases}$$

Esempio: (d=1) $Q \in L$ retta $\Rightarrow \tau_Q(L) = L \Rightarrow I_Q(L, L) := +\infty \geq 3$

$\Downarrow$

Q LISCIO

$\Rightarrow$ sulle rette ogni punto è di flesso.

Esempio: (d=2) $Z_{\mathbb{P}}(F)$ integrale (IRRID + RIDOTTA) $\Rightarrow$ per Bezout

$I_Q(Z_{\mathbb{P}}(F), L \text{ retta qualsiasi}) = 2 \Rightarrow$ sulle coniche integrali non ci sono punti di flesso.

Se $Z_{\mathbb{P}}(F)$ è IRRID ma NON RIDOTTO $\Rightarrow Z_{\mathbb{P}}(F)$ RETTA DOPPIA

$\Rightarrow$ ogni punto è di flesso

Se $Z_{\mathbb{P}}(F)$ è RIDUCIBILE e RIDOTTO $\Rightarrow Z_{\mathbb{P}}(F) = L_1 \cup L_2 \Rightarrow$ ogni punto è di flesso a parte $Q := L_1 \cap L_2$ perché non liscio

DEF [HESSIANO]

La **MATRICE HESSIANA** di $F \in \mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]$, $\deg(F) \geq 2$, nel punto $Q \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}(F)$ è definita come:

$$\underbrace{M_F(Q)}_{\in M_{3\times 3}(\mathbb{K})} := \left((\partial_{x_{i-1}} \partial_{x_{j-1}} F)(Q) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

CHIARAMENTE **SIMMETRICA**

mentre l'**HESSIANO** o determinante Hessiano è definito come:

$$H_F(Q) := \det(M_F(Q)).$$

La **CURVA HESSIANA** è definita come $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}(H_F)$ [supponiamo $\deg(F) \geq 3 \wedge H_F \not\equiv 0$]

e la **CONICA OSCULATRICE** è definita come

$$\Gamma_F(Q) := (x_0 \; x_1 \; x_2)\, M_F(Q) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=0}^{2} x_i x_j (\partial_{x_i} \partial_{x_j} F)(Q) \quad \forall Q \text{ LISCIO}$$

OSS $Q \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}(F) \setminus \mathrm{Sing}(F) \Rightarrow Q \in \Gamma_F(Q)$ (esercizio)

HINT: USARE EULERO

PROP $\deg(F) \geq 3$, $Q \in Z_P(F) \setminus \mathrm{Sing}(F)$. Le seguenti sono equivalenti

i). Q DI FLESSO

ii). $\Gamma_F(Q) = \tau_Q(Z_P(F)) \cup \ldots$ DEGENERE

iii). $\Gamma_F(Q)$ DEGENERE

Proof:

i $\Leftrightarrow$ ii Sia $Q = (q_0 : q_1 : q_2) \neq (r_0 : r_1 : r_2) = R \in \tau_Q(Z_P(F))$
Allora ogni punto $P \in \tau_Q(Z_P(F))$ si scrive come $P = {}^{\exists}\lambda Q + {}^{\exists}\mu R$
Per Taylor omogenea:

$$G(\lambda,\mu) := F(\lambda Q + \mu R) = F(Q)\lambda^d + \left(\sum_i (\partial_{x_i} F)(Q) r_i\right)\lambda^{d-1}\mu +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j} (\partial_{x_i}\partial_{x_j} F)(Q) r_i r_j\right)\lambda^{d-2}\mu^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{d!}\sum_{i_1,\ldots,i_d} (\partial_{x_{i_1}} \circ \ldots \circ \partial_{x_{i_d}} F)(Q) r_{i_1} \cdot \ldots \cdot r_{i_d}\right)\mu^d$$

Studiamo ora l'i-esimo coefficiente $[\lambda^{d-i}\mu^i].F(\lambda Q+\mu R)$

i=0 $Q \in Z_P(F) \setminus Sing(F)$ per ipotesi $\Rightarrow F(Q)=0$ ✓

i=1 $R \in \tau_Q(Z_P(F)) \Leftrightarrow {}^t\nabla F(Q)\cdot\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2}(\partial_{x_i}F)(Q)r_i=0$ ✓

i=2 Q DI FLESSO $\Leftrightarrow I_Q(Z_P(F),\tau_Q(Z_P(F)))\geq 3$

$Q \longleftrightarrow (\bar\lambda=1,\bar\mu=0)$

$\Leftrightarrow (\bar\lambda,\bar\mu)=(1:0)$ è uno zero TRIPLO di $G(\lambda,\mu)$

VALE $\forall R \in \tau_Q(Z_P(F))\setminus\{Q\}$

$\Leftrightarrow \sum_{i,j=0}^{2}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}F)(Q)r_ir_j=0 \overset{\text{DEF } \Gamma_F(Q)}{\Longleftrightarrow} (\Gamma_F(Q))(R)=0 \Leftrightarrow R\in\Gamma_F(Q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tau_Q(Z_P(F))\subsetneq\Gamma_F(Q) \Leftrightarrow \Gamma_F(Q)$ DEGENERE e $\tau_Q(Z_P(F))$ è sua componente

ii⇔iii È ovvio che ii ⇒ iii. Dimostriamo che iii ⇒ ii. Ricordiamo che una conica C si può sempre scrivere come ${}^tx\cdot A\cdot x$ (VETTORE COLONNA) e che le sue tangente in un punto liscio Q (per C) ha equazione

$$\tau_Q(C):\ {}^tQ\cdot A\cdot x$$

Applicando questo principio alla conica osculatrice $C=\Gamma_F(Q)$ troviamo che:

$$\tau_Q(\Gamma_F(Q)) : \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} M_F(Q) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{2} \left(\sum_{i=0}^{2} q_i (\partial_{x_i}\partial_{x_j} F)(Q) \right) x_j = 0$$

PER EULERO IL TERMINE IN PARENTESI È $\underbrace{(\deg \partial_{x_j} F)}_{= d-1} (\partial_{x_j} F)(Q)$

$$\Leftrightarrow (d-1) \cdot \sum_{j=0}^{2} x_j (\partial_{x_j} F)(Q) = 0$$

$$\Leftrightarrow (d-1) \cdot {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tau_Q(Z_P(F))$$

Per ipotesi $\Gamma_F(Q)$ è DEGENERE e per definizione è una conica. Si osservi che una conica degenere contiene tutte le sue tangenti, dunque $\Gamma_F(Q) \supseteq \tau_Q(\Gamma_F(Q))$ quindi $\Gamma_F(Q) \supseteq \tau_Q(Z_P(F))$

Se invece Q è singolare per $\Gamma_F(Q)$ (anche se liscio per $Z_P(F)$) prendiamo $R = (r_0 : r_1 : r_2) \in \tau_Q(Z_P(F))$ e osserviamo

$$0 \overset{R \in \tau_Q}{=} \sum_{j=0}^{2} (\partial_{x_j} F)(Q) r_j = (d-1) \cdot \sum_{j=0}^{2} (\partial_{x_j} F)(Q) r_j = \sum_{i,j=0}^{2} (\partial_{x_i}\partial_{x_j} F)(Q) q_i r_j$$

Allora $Q \in \tau_R(\Gamma_F(Q)) \Rightarrow \tau_R(\Gamma_F(Q)) = \overrightarrow{QR} = \tau_Q(Z_P(F)) \Rightarrow \tau_Q(Z_P(F)) \subseteq \Gamma_F(Q)$ $\square$

$\Gamma_F(Q)$ CONICA DEGENERE
Q SINGOLARE

Questa proposizione ci permette di dimostrare il seguente thm.

THM $\deg(F) \geq 3$. ← PUÒ ANCHE ESSERE RIDUCIBILE oppure NON RIDOTTO

$$Z_P(F) \cap Z_P(H_F) = \operatorname{Sing}(Z_P(F)) \cup \left\{ \begin{matrix} \text{FLESSI} \\ \text{di } Z_P(F) \end{matrix} \right\}$$

Proof:

⊇ Se $Q \in \operatorname{Sing}(Z_P(F)) \Rightarrow (\nabla F)(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$0 = (d-1)\partial_{x_i} F(Q) = \sum_{j=0}^{2} q_j (\partial_{x_i}\partial_{x_j} F)(Q) \qquad i = 1, 2, 3$$

Allora $\underset{\underset{0}{\#}}{Q} = (q_0 : q_1 : q_2) \in \ker(M_F(Q)) \Rightarrow \dim(\ker(M_F(Q))) \geq 1$

$\Rightarrow M_F(Q)$ DEGENERE $\Rightarrow H_F(Q) = 0$ e siccome $F(Q) = 0$ allora

$\operatorname{Sing}(Z_P(F)) \subseteq Z_P(F) \cap Z_P(H_F)$.

Se Q è FLESSO $\xRightarrow{\text{PROP. SCORSA}}$ $\Gamma_F(Q)$ DEGENERE $\Rightarrow M_F(Q)$ DEGENERE $\Rightarrow H_F(Q) = 0$

$\Rightarrow \{\text{FLESSI di } Z_P(F)\} \subseteq Z_P(F) \cap Z_P(H_F)$. Ne segue

⊆ $F(Q) = 0 \wedge H_F(Q) = 0$ e supponiamo Q liscio $\Rightarrow \Gamma_F(Q)$ DEGENERE

$\xRightarrow{\text{PROP SCORSA}}$ Q è FLESSO

$\square$

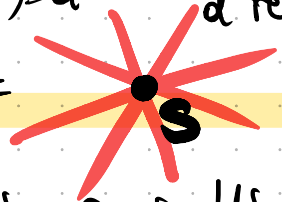
COR $Z_{\mathbb{P}}(F)$ LISCIA $\wedge$ $K=\overline{K}$ $\wedge$ $\overset{d}{\overset{\shortparallel}{\deg}}(F)\geq 3 \Rightarrow$ $1 \leq \#\{\text{FLESSI}\}_{\text{di } Z_{\mathbb{P}}(F)} \leq 3d(d-2)$

Proof: $Z_{\mathbb{P}}(F)\cap Z_{\mathbb{P}}(H_F)\neq\emptyset \wedge \mathrm{Sing}(Z_{\mathbb{P}}(F))=\emptyset \xRightarrow{\text{PROP SCORSA}} \{\text{FLESSI}\}\neq\emptyset$
$\Rightarrow \#\{\text{FLESSI}\}\geq 1$. $\deg H_F = \underbrace{3}_{\substack{\text{ORDINE}\\ \text{MATRICE}\\ \text{HESSIANA}}}\underbrace{(d-2)}_{\substack{\text{GRADO}\\ \text{DERIVATE}\\ \text{SECONDE}}}$ e $K=\overline{K} \xRightarrow{\text{Bezout}} \#\{\text{FLESSI}\}\leq 3(d-2)\cdot \overset{\deg(F)}{d}$

□

LEMMA $\overset{Z_{\mathbb{P}}(F)}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{C}}} \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{C}' \overset{Z_{\mathbb{P}}(F')}{=}$ curve algebriche piane proiettivamente equivalenti $\Rightarrow H_F \overset{\text{SIMILARITÀ TRA MATRICI}}{\sim} H_{F'}$

Proof: [esercizio, usare $T:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ proiettività $\Rightarrow T(Z_{\mathbb{P}}(F)) = Z_{\mathbb{P}}\Big(\overbrace{F\Big(T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\Big)}^{\tilde{F}}\Big)$]

LEMMA $Z_{\mathbb{P}}(\overset{\deg(F)=d}{F}) =$  $\Rightarrow H_F\equiv 0.$

Proof: a mezzo di proiettività (w.l.o.g. per il lemma sopra) possiamo supporre $S=(1:0:0)$ allora

$$F(x_0,x_1,x_2)=\prod_{i=1}^{d}\left(\overset{\exists}{\alpha_i}x_1+\overset{\exists}{\beta_i}x_2\right)$$

Allora la matrice Hessiana è

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{x_1}\partial_{x_1}F & \partial_{x_1}\partial_{x_2}F \\ 0 & \partial_{x_2}\partial_{x_1}F & \partial_{x_2}\partial_{x_2}F \end{pmatrix} \Rightarrow H_F := \det(M_F) \equiv 0$$

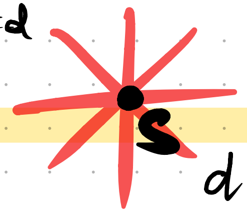
□

D: vale anche il viceversa? **R**: per $n=2$, **SI!**

$\boxed{\text{THM}}$ **[GORDAN - NOETHER][$n=2$]** $\deg(F) \geq 2$.

$\deg(F)=d$

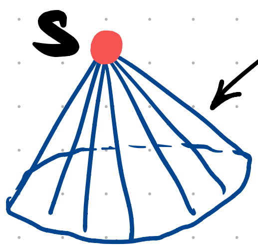
$$Z_p(F) =$$



$$\iff H_F \equiv 0$$

D: E quindi vale anche per qualsiasi n? **R**: Così si è creduto!

$\boxed{\text{CONJ}}$ **[HESSE]** $\mathbb{P}^n \supset Z_p(F) =$ CONO PROIETTIVO in $\mathbb{P}^n$ $\iff H_F \equiv 0$



THM **[GORDAN - NOETHER][$n=3,4$]**

La Congettura di Hesse è vera per $n=3$, ed è falsa per $n=4$, dove il controesempio è dato dalla **CUBICA di PERAZZO**

$$CP: \; x_0 x_3^2 + 2x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4^2 = 0$$

Dim (solo del controesempio):

$$M_{CP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_4 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_4 \\ 2x_3 & 2x_4 & 0 & 2x_0 & 2x_1 \\ 0 & 2x_3 & 2x_4 & 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_{CP} := \det(M_{CP}) \equiv 0$$

$\square$

Problema aperto: Classificare ipersuperfici a Hessiano nullo in $\mathbb{P}^n$ per $n \geq 5$.